

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ им. О. Ю. ШМИДА

М. С. МОЛОДЕНСКИЙ, М. В. КРАМЕР

ЗЕМНЫЕ ПРИЛИВЫ
И НУТАЦИЯ
ЗЕМЛИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1961

СОДЕРЖАНИЕ

М. С. Молоденский. Теория нутации и суточных земных приливов	3
М. С. Молоденский, М. В. Крамер. Числа Лява для статических земных приливов 2 и 3-го порядков	26

Михаил Сергеевич Молоденский,
Марианна Васильевна Крамер

Земные приливы и нутация Земли

Утверждено к печати Институтом физики Земли им. О. Ю. Шмидта Академии наук СССР
Редактор Издательства А. З. Рывкин. Технический редактор Г. Н. Романов

Сдано в набор 11/IV 1961 г. Подписано к печати 22/I 1961 г. Формат 70×108¹/₁₆ печ. л.
2,5 усл-печ. л. 3,42 уч.-издат. л. 2,7 Тираж 1500 экз. Т-05681 Изд. № 137
Тип-зак. № 3803 Цена 20 к.

Издательство Академии наук СССР. Москва, Б-64, Подсосенский пер., 21
2-я типография Издательства. Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

М. С. Молоденский

ТЕОРИЯ НУТАЦИИ И СУТОЧНЫХ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ

1. Теория нутации вращающейся жидкой массы эллипсоидальной формы, заключенной в твердую оболочку, дана Пуанкаре [1]. На геофизическое значение этой теории и ее значительное усложнение, связанное с необходимостью учета упругости оболочки, впервые обратил внимание Джеффрис [2]. Он же совместно с Висентом разработал теорию с учетом упругости оболочки применительно к двум моделям Земли [3,4]. Результаты этой теории Джеффрис сравнил [5] с наблюдаемыми амплитудами главной и двухнедельной нутаций, полученными Федоровым [6] по материалам международной службы широт, и полугодовой нутации, определенной Поповым по наблюдениям зенитной звезды в Полтаве.

В теории Джеффриса и Висента применен вариационный метод, затрудняющий возможность составить ясное представление о степени приближения к точному решению задачи. Автор настоящей статьи пытался воспроизвести и уточнить эту теорию, однако неясных мест было так много, что пришлось от этого метода отказаться.

Излагаемая ниже теория мне кажется достаточно простой и общей; ясно виден характер упрощений задачи и, если бы это понадобилось, пути повышения точности теории. Исходной является система двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, определяющая малые колебания вращающейся сжимаемой жидкости в системе координат, имеющей нутационное движение. Решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным и динамическим условиям задачи, построено на основе решения для однородной несжимаемой жидкости путем введения в решение малых «корректирующих» членов. Без заметного увеличения числа формул удалось избежать применения функций комплексного аргумента. Наглядность изложения от этого выиграла. Результаты теории существенно отличаются от опубликованных Джеффрисом и Висентом.

2. Уравнения упругости при существовании потенциала U объемных сил имеют следующий вид:

$$\rho \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \rho \operatorname{grad} U + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор текущей точки (x, y, z) , ρ — плотность, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ — векторы давления, действующие на элементы плоскости YZ, ZX или

XY. Надстрочная точка означает частную производную по времени

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , левая часть уравнения (1) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{\mathbf{r}}}{Dt} &= \frac{\tilde{D}}{Dt} [\dot{\mathbf{r}} + [\omega\mathbf{r}]] + [\omega [\dot{\mathbf{r}} + [\omega\mathbf{r}]]] = \\ &= \frac{\tilde{D}\dot{\mathbf{r}}}{Dt} + 2 [\omega\dot{\mathbf{r}}] + [\tilde{\omega}\mathbf{r}] + (\omega\mathbf{r})\omega - \omega^2\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Волнистая надстрочная черта отмечает, что производная по времени берется в подвижной системе координат.

Если в подвижной системе координат смещения являются малыми, то

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3)$$

так как произведения скорости смещения на деформации являются малыми второго порядка,

При исследовании приливов и нутации в потенциал U включается гравитационный потенциал всех масс Земли W_0 , потенциал приливообразующей силы V_e и потенциал от деформации Земли V_i . Потенциал V_e в подвижной системе координат имеет следующий вид:

$$V_e = \frac{1}{3} \kappa \frac{g}{a} P_2^m r^2 \cos(\sigma t - m\lambda), \quad (4)$$

где σ — частота приливообразующей силы, P_2^m — присоединенный полином Лежандра, λ — долгота, $\kappa, \frac{g}{a}$, m — постоянные ($m = 1$ для суточного прилива, $m = 2$ для полусуточного и $m = 0$ для двухнедельного прилива).

Для ω в подвижной системе координат примем выражение

$$\omega = \omega (\varepsilon \cos \sigma t \mathbf{i} + \varepsilon \sin \sigma t \mathbf{j} + \mathbf{k}), \quad (5)$$

где ω, ε — постоянные, ε — малая величина, пока произвольная. В этом случае из (2) и (3) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\dot{x}}{Dt} &= \ddot{u} - 2\omega\dot{v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right); \\ \frac{D\dot{y}}{Dt} &= \ddot{v} + 2\omega\dot{u} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right); \\ \frac{D\dot{z}}{Dt} &= \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= -\varepsilon \omega^2 z l \cos(\sigma t - \lambda); \\ \Phi_0 &= \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 l^2; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ — смещения в подвижной системе координат, Φ_0 — потенциал центробежной силы.

Как и в статическом случае [7], для определения начальных напряжений необходимо допустить, что в поле постоянно действующих сил с потенциалом $W = W_0 + \varphi_0$ напряжения носят гидростатический характер, т. е.

$$\rho_0 \text{grad } W = \text{grad } P, \quad (8)$$

где P — гидростатическое давление, ρ_0 — невозмущенное значение плотности, соответствующее $V_e = V_i = 0$.

Теперь преобразуем правую часть уравнения (1), предварительно записав ее в виде суммы трех членов:

$$\begin{aligned} & \rho \text{grad } V + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \\ & = -\rho \text{grad } \varphi_0 + [\rho \text{grad } W - \text{grad } P(x - u, y - v, z - w)] + \\ & + \left[\text{grad } P(x - u, y - v, z - w) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Первый член перенесем в левую часть уравнения. Второй член преобразуем при помощи (8), учитывая изменение плотности в результате деформации:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \rho_0(x - u, y - v, z - w)(1 - \delta); \\ \delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \rho \text{grad } W - \text{grad } P(x - u, y - v, z - w) = \\ & = \rho_0(1 - \delta) \text{grad } W(x + u, y + v, z + w) - \text{grad } P = \\ & = \rho \text{grad } (V_e + V_i + \eta) - \rho \delta \text{grad } W, \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w. \quad (10)$$

Последний член выражается через смещения при помощи известных уравнений упругости [7]. Мы считаем, что поверхности постоянного значения потенциала, плотности и коэффициентов упругости λ и μ совпадают. Однако эти поверхности принимаем не сферическими, а сфероидными. Фигура сфероидов определяется теорией равновесия вращающейся неоднородной планеты. В результате вычислений получаем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega \dot{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\Delta u + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\mu'}{W' \rho} \left[u' W' + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right]; \\ \ddot{v} + 2\omega \dot{u} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\Delta v + \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\mu'}{W' \rho} \left[v' W' + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} \right]; \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \left(\frac{\lambda \rho'}{\rho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\Delta w + \frac{\partial \delta}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\mu'}{W' \rho} \left[w' W' + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right]; \\ -\psi &= V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i + \eta + \frac{\lambda \delta}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$- \psi = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i + \eta + \frac{\lambda \delta}{\rho}. \quad (12)$$

Надстрочный штрих означает производную по направлению внешней нормали к поверхности уровня потенциала.

К уравнениям (11) необходимо еще добавить уравнение Пуассона. Полное изменение плотности в фиксированной точке пространства определяется уравнением неразрывности

$$\dot{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0;$$

следовательно,

$$-\dot{\rho} = \rho\delta + \frac{\rho'}{W'}\eta;$$

поэтому

$$\Delta V_i = 4\pi f \left(\rho\delta + \frac{\rho'}{W'}\eta \right), \quad (13)$$

где Δ — оператор Лапласа, f — постоянная тяготения.

Система уравнений (9) — (13) достаточна для определения всех функций.

3. При $\mu = 0$ получаются гидродинамические уравнения. Если, кроме того, принять, что плотность зависит только от гидростатического давления, то, поскольку $\mu = 0$,

$$\lambda\rho' = \rho^2 W' \quad (14)$$

и вместо (11) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega\dot{v} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial z} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения совпадают с обычными, если $\varphi = 0$ и $V_i = 0$.

Изменение гидростатического давления в фиксированной точке пространства (назовем его p) получается путем добавления к изменению давления фиксированного элемента жидкости ($-\lambda\delta$) изменения давления за счет его перемещения ($-\eta\rho$). Поэтому

$$-p = \lambda\delta + \eta\rho, \quad (16)$$

а уравнения (12) и (13) равносильны следующим:

$$-\frac{W'}{4\pi f\rho'}\Delta V_i = \psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega}\varphi + V_i = \frac{p}{\rho}. \quad (17)$$

Величины η , δ и p можно выразить через ψ . Для этого выразим через ψ смещения u , v , w , которые, как видно из (4) и (5), при установившемся движении являются гармоническими колебаниями с частотой σ , поэтому

$$\frac{d^2}{dt^2} = -\sigma^2. \quad (18)$$

Продифференцируем первые две формулы (15) по времени, используем (18) и исключим \dot{u} и \dot{v} . Мы получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2)u &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial y}; \\ (\sigma^2 - 4\omega^2)v &= \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{\sigma^2}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial x}; \\ \sigma^2 w &= \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

С этими значениями смещений из (9) и (10) найдем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 - 4\omega^2) \delta &= \Delta\psi - 4 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \\ (\sigma^2 - 4\omega^2) \eta &= \psi' W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{2\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Второе выражение можно упростить. Потенциал W зависит только от z и l , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{y}{l} \frac{\partial W}{\partial l}; \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{x}{l} \frac{\partial W}{\partial l}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{m}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (21)$$

так как в функцию ψ время и долгота входят только в линейной комбинации $\sigma t - m\lambda$.

Таким образом,

$$(\sigma^2 - 4\omega^2) \eta = \psi' W' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} + \frac{2(\sigma^2 - 4\omega^2)}{\sigma\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (22)$$

Теперь системе уравнений (17) можно придать следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{W'}{4\pi f \rho_i} \Delta V_i &= \psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i = \frac{1}{\omega^2} F(\psi) - \frac{2}{\sigma\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}; \\ F(\psi) &= \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \left[\frac{\rho W'}{\rho'} \left(\Delta \psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \psi' W' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \psi \frac{\partial W}{\partial l} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Мы получили систему двух уравнений в частных производных второго порядка с неизвестными функциями ψ и V_i . Граничные условия определяются непрерывностью напряжений, потенциала и его производных, а также нормальной к границе жидкости компоненты смещений. Подробно эти условия будут рассмотрены позднее.

4. Наиболее трудным является решение уравнений (9) — (13) для оболочки. К счастью, здесь можно допустить относительную погрешность порядка сжатия оболочки и, следуя примеру Джеффриса и Висента [3], использовать решение для сферической оболочки при $\sigma = \omega = 0$. Для чисел Лява относительная погрешность порядка сжатия допустима, а нутация очень слабо зависит от упругости оболочки. Следует заметить, что более точное решение невозможно из-за погрешностей порядка выше сжатия в функциях ρ , $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\lambda}{\rho}$, входящих в (11).

Основная трудность решения системы уравнений (23) для жидкого ядра заключается в близости частот вынужденных и собственных колебаний для суточного прилива и необходимости учитывать сжатие ядра, так как частота собственных колебаний существенным образом зависит от сжатия.

Решение системы уравнений (23) будем искать в следующем виде;

$$V + \psi = \alpha \Phi + \omega^2 (V_1 + \psi_1); \quad (24)$$

$$\psi = (2\omega + \sigma) \sigma \beta l z \cos(\sigma t - \lambda) + \omega^2 \psi_1; \quad (25)$$

где

$$\Phi = -\frac{W'}{4\pi f \rho'} \Delta \Phi,$$

$$V = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi + V_i. \quad (26)$$

Далее убедимся, что при $\rho' = 0$ можно удовлетворить системе уравнений (23) и граничным условиям, приняв $\psi_1 = V_1 = 0$. В общем случае суточный прилив отличается от статического только тогда, когда частота вынужденных колебаний σ близка к частоте собственных колебаний, близкой к ω . Вблизи резонанса функция ψ быстро возрастает вследствие увеличения параметра β от значений порядка единицы до значений порядка нескольких сотен (для прилива K_1). Параметр α и функции Φ , V_1 , ψ_1 с изменением σ меняются незначительно. Этими соображениями оправдывается переход к новым неизвестным функциям V_1 и ψ_1 .

Внося (24) — (26) в (23), получаем два уравнения для определения V_1 и ψ_1 :

$$\begin{aligned} \alpha \Phi - \frac{\omega^2 W'}{4\pi f \rho'} \Delta V_1 &= \alpha \Phi + \omega^2 (V_1 + \psi_1) = \\ &= \left[\beta \left(l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} \right) - 2 \left(\frac{\sigma + \omega}{\sigma} \beta - \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon \right) l \frac{\partial W}{\partial z} \right] \cos(\sigma t - \lambda) + F(\psi_1). \end{aligned} \quad (27)$$

В решении для оболочки, как упоминалось, неизбежна относительная погрешность порядка q — отношения центробежной силы к силе тяжести (или порядка сжатия). Такая же относительная погрешность сохранится в условиях на границе ядро — оболочка и, следовательно, неизбежна в решении для ядра. Поэтому в (27) можно отбросить члены порядка q и не считаться со сжатием уровенных поверхностей в членах, которые не содержат множителем параметр β . Из двух уравнений (27) одно в этом приближении совпадает с (26), другое приводится к следующему:

$$F(\psi_1) = \alpha \Phi - \beta \left(l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} \right) \cos(\sigma t - \lambda) + \nu l \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\sigma t - \lambda), \quad (28)$$

где

$$\nu = 2 \left(\frac{\sigma + \omega}{\sigma} \beta - \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon \right).$$

С принятым приближением уравнение (26) приводится к обыкновенному уравнению 2-го порядка относительно новой функции $K(r)$. Если в (26) принять

$$\Phi = K \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda), \quad (29)$$

то получим

$$K'' + \frac{2}{r} K' + \left(\frac{4\pi f \rho'}{W'} - \frac{6}{r^2} \right) K = 0. \quad (30)$$

Не трудно убедиться, что второй член в (28) удовлетворяет уравнению (26) и, следовательно, может быть представлен формулой (29) при специальном выборе функции K . Пусть

$$l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} = K_1 \frac{lz}{r^2}.$$

Функция K_1 является ограниченной при $r = 0$ и удовлетворяет уравнению (30), поэтому полностью определяется ее значением на границе ядро—оболочка:

$$K_1(b) = [e^2 W' r]_{r=b}, \quad (31)$$

где e — эксцентриситет границы оболочки.

Вместо (28), внося $F(\psi)$ из (23), получаем

$$\begin{aligned} & \left[(\alpha K - \beta K_1) r^{-2} + \nu \frac{W'}{r} \right] lz \cos(\sigma t - \lambda) = \\ & = \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \frac{W'}{\rho'} \left[\rho \left(\Delta \psi_1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\rho'}{r} \left(r \psi_1' - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} z \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{2\omega}{\sigma} \psi_1 \right) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

В это уравнение параметр β входит только с малыми множителями $\frac{\sigma + \omega}{\sigma}$ и K_1 (порядка e^2).

Учитывая характер зависимости свободного члена от времени и долготы, будем искать решение в виде бесконечного ряда следующего вида:

$$\psi_1 = \cos(\sigma t - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n r^n P_n^1, \quad (33)$$

где χ_n — неизвестные функции только r , P_n^1 — присоединенные полиномы Лежандра, зависящие от $\cos \vartheta$ (ϑ — дополнение широты до $\frac{\pi}{2}$). Это выражение является общим, так как функции P_n^1 образуют полную систему.

Используя рекуррентные формулы

$$\left. \begin{aligned} (2n+1) \cos \vartheta P_n^1 &= n P_{n+1}^1 + (n+1) P_{n-1}^1; \\ \sin^2 \vartheta (P_n^1)' &= -n P_{n+1}^1 + (n+1) \cos \vartheta P_n^1; \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

получаем

$$\begin{aligned} (2n+1) z \frac{\partial}{\partial z} (\chi_n r^n P_n^1) &= \frac{n}{2n+3} [(n+1) P_{n+2}^1 + (n+2) P_n^1] r^{n+1} \chi_n' + \\ &+ \frac{n+1}{2n-1} [(n-1) P_n^1 + n P_{n-2}^1] r^{-n} (\chi_n r^{2n+1})'; \\ (2n+1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\chi_n r^n P_n^1) &= \frac{n(n+2)}{2n+3} (\chi_n' r^{2n+2})' r^{-n-2} P_n^1 + \\ &+ \frac{(n-1)(n+1)}{2n-1} (\chi_n r^{2n+1})' r^{-2n} r^{n-1} P_n^1 + \\ &+ \frac{n(n+1)}{2n+3} \left(\frac{\chi_n'}{r} \right)' r^{n+1} P_{n+2}^1 + \frac{n(n+1)}{2n-1} \left((\chi_n r^{2n+1})' \frac{1}{r} \right)' r^{-n} P_{n-2}^1. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в (32) и преобразований находим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sigma - 2\omega}{\sigma} \chi_n r^{n-1} \rho' + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n}{2n+3} \right) \frac{n+2}{2n+1} (\rho \chi_n' r^{2n+2})' r^{-n-2} + \right. \\
 & + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{n+1}{2n-1} \right) \frac{n-1}{2n+1} \left(\frac{\rho}{r^{2n}} (\chi_n r^{2n+1})' \right)' r^{n-1} - \\
 & - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} \left(\frac{\rho}{r} \chi_{n+2}' \right)' r^{n-1} - \\
 & - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \left((\chi_{n+2} r^{2n+5})' \frac{\rho}{r} \right)' r^{-n-2} \Big] P_n^1 = \\
 & = \frac{4\omega^2 - \sigma^2}{3\omega^2} \frac{\rho'}{W'} (\alpha K - \beta K_1 + \nu W' r) P_2^1. \tag{35}
 \end{aligned}$$

Из (25) и (22) следует

$$\eta = (\nu W' r - \beta K_1) \frac{I_2}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) - \frac{W'}{3} \left(\psi_1' - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{\psi_1}{r} - 4 \frac{\omega^2}{\sigma^2} \frac{z}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right).$$

При помощи (34) получаем

$$\eta = \cos(\sigma t - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} r^n \eta_n P_n^1,$$

где

$$\begin{aligned}
 \eta_2 = & \frac{W'}{3r} \left[\nu - \frac{K_1}{W' r} \beta - \left(1 - \frac{12}{7} \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) \chi_2' r + \frac{80}{63} \frac{\omega^2}{\sigma^2} (\chi_4 r^9)' r^{-6} + \right. \\
 & \left. + \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \chi_2 \right]. \tag{36}
 \end{aligned}$$

Приравнявая множители при P_n^1 в обеих частях (35), получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций χ_n . Эта система приводится к конечной, если плотность задана в виде многочлена от r . Бесконечная система, как видно из (34), получилась из-за наличия в (32) членов $z \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2}$, приводящих к тому, что смещения в ядре не пропорциональны P_2^1 , как в статическом случае. Приливу второго порядка сопутствуют приливы 4-го, 6-го и других порядков (очень слабые).

В дальнейшем нам понадобится только основное уравнение, соответствующее $n = 2$. Его можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\frac{12}{7} \frac{\omega^2}{\sigma^2} - 1 \right) \rho \chi_2' r^6 + \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho \chi_2 r^5 + \frac{80}{63} \frac{\omega^2}{\sigma^2} (\chi_4 r^9)' \frac{\rho}{r} + \nu \rho r^5 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4\pi f} \left(\frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right]' = \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho (\chi_2 r^5)' + 5\nu \rho r^4;
 \end{aligned}$$

при помощи (36) это уравнение можно записать так:

$$\left[\frac{3}{W'} \rho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \rho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left(\frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right]' = \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \rho (\chi_2 r^5)' + 5\nu \rho r^4. \quad (37)$$

Правая часть зависит от χ_2 и χ_2' . Из (33) следует, что добавление к χ_2 постоянного слагаемого равносильно изменению параметра β в формуле (25). Поэтому мы можем уточнить смысл β и функции χ_2 следующим дополнительным условием:

$$\int_c^b \rho (\chi_2 r^5)' dr = 0, \quad (38)$$

где b и c — внешняя и внутренняя границы жидкой части ядра (если внутреннего ядра нет, то $c = 0$).

Интегрируя (37) в пределах от c до b , теперь получаем

$$\left| \frac{3}{W'} \rho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \rho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left(\frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right|_c^b = 5\nu \int_c^b \rho r^4 dr, \quad (39)$$

Общий интеграл уравнения (30) легко находится в том случае, когда плотность в ядре задана простым выражением, например, меняется по закону Лежандра или Роша. В общем случае функцию K можно получить путем численного интегрирования. Вычислив два линейно-независимых частных интеграла K_1 и K_2 , найдем

$$\alpha K = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2, \quad (40)$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. Можно принять, что функция K_1 ограничена в центре.

Функцию K_2 можно получить из K_1 путем квадратуры

$$K_2 = K_1 \int_0^r K_1^{-2} r^{-2} dr, \quad (40')$$

так как K_2 удовлетворяет уравнению (30), если удовлетворяет этому уравнению K_1 .

В приближении Радо функция K_1 выражается через параметр Радо следующим образом:

$$\frac{K_1'}{K_1} = \frac{\xi - 1}{r} - \frac{4\pi f \rho_i}{W'} = \frac{\xi - 1}{r} + \frac{m'}{m}, \quad (41)$$

где m — масса, заключенная внутри сферы радиуса r ; ξ определяется из уравнения

$$\frac{C}{\frac{2}{3} m r^2} = 1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \xi},$$

где C — центральный момент инерции той же массы.

5. Рассмотрим граничные условия. Решение системы дифференциальных уравнений (11) для статического прилива в упругой сферической оболочке Земли получено численным интегрированием и подробно описано в работах [7] и [8]. Эти уравнения приводятся к системе шести линейных однородных уравнений первого порядка относительно функций

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(1 + \frac{V_i}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi} \right) \frac{r^2}{a} g; \\ H &= \frac{\eta}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi} \frac{g}{W'} \frac{r^2}{a}; \\ L &= (R' - 4\pi f \rho H) r^2; \\ M &= \left(T' + H - \frac{2T}{r} \right) r^2 \mu; \\ N &= (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left(\frac{2H}{r} - \frac{6T}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Шестая функция T входит множителем в компоненты тангенциального смещения. Все эти функции, кроме T , сохраняют непрерывность на границе скачкообразного изменения плотности и коэффициентов упругости.

Общий интеграл рассматриваемой линейной однородной системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\Phi(r) = h \frac{\partial \Phi}{\partial h} + l \frac{\partial \Phi}{\partial l} + (1+k) \frac{\partial \Phi}{\partial k} + N_0 \frac{\partial \Phi}{\partial N_0} + M_0 \frac{\partial \Phi}{\partial M_0} + L_0 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}.$$

Здесь $\Phi(r)$ — одна из функций H, T, R, N, M или L ; числа $h, l, 1+k, N_0, M_0, L_0$ — произвольные постоянные интегрирования, пропорциональные значениям соответствующих функций на поверхности сферы: функции $\frac{\partial \Phi}{\partial h}, \frac{\partial \Phi}{\partial k}, \frac{\partial \Phi}{\partial l}, \frac{\partial \Phi}{\partial N_0}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_0}, \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$ (общее их число равно 36) получены путем численного интегрирования (например, $\frac{\partial \Phi}{\partial h}$ является частным интегралом, соответствующим условиям $h=1; l=1+k=N_0=M_0=L_0=0$).

На поверхности сферы нормальные и тангенциальные напряжения отсутствуют. Поэтому $N_0=M_0=0$. Производная от потенциала должна быть непрерывна, поэтому [7]

$$L_0 = 2 - 3k. \quad (43)$$

С учетом этих условий получаем

$$\Phi(r) = h \frac{\partial \Phi}{\partial h} + l \frac{\partial \Phi}{\partial l} + (1+k) \frac{\partial \Phi}{\partial k} + (2-3k) \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}. \quad (44)$$

Сюда входят три числа Лява, которые должны быть определены из условий на внутренней границе оболочки $r=b$.

Если бы ядро было упругим, то на этой границе следовало бы обеспечить непрерывность всех шести функций $\Phi(r)$. Но ядро жидкое, поэтому

тангенциальная компонента смещения, пропорциональная T , может быть разрывной. Остальным пяти условиям непрерывности функций (42) нужно удовлетворить путем соответствующего выбора параметров, входящих в (44), (24) и (25).

1. Функция M непрерывна. В ядре имеем $\mu = 0$, поэтому

$$M(b) = 0. \quad (45)$$

2. Функция R непрерывна. Из (24), (25), (29) и (40) следует

$$V = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \beta r^2 = \kappa R \frac{Iz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda). \quad (46)$$

Как указывалось, член $\omega^2 V_1$ удерживать не имело смысла. Таким образом,

$$R(b) = \left[\frac{\alpha_1}{\kappa} K_1 + \frac{\alpha_2}{\kappa} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r^2 \right]_{r=b}. \quad (47)$$

3. Функция L непрерывна. Дифференцируя (46), получаем

$$V' = [\alpha_1 K_1' + \alpha_2 K_2' - 2(2\omega + \sigma) \sigma \beta r] \frac{Iz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) = \kappa R_i' \frac{Iz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda),$$

где R_i' — внутренняя производная от R , следующим образом связанная с производной R' внутри упругого слоя:

$$R' - R_i' = 4\pi f(\rho - \rho_i)H,$$

где ρ_i — плотность в ядре.

Исключая R_i' , получаем

$$\frac{1}{b^2} L(b) + 4\pi f \rho_i H(b) = \left[\frac{\alpha_1}{\kappa} K_1' + \frac{\alpha_2}{\kappa} K_2' - 2(2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r \right]_{r=b}. \quad (48)$$

4. Функция H непрерывна. Сравнивая (42) с (36) и учитывая (4), находим

$$\frac{3\eta_2}{W'} r^2 = \kappa H, \quad (49)$$

Внесем это значение в (39), исключим α_1 и α_2 при помощи (47) и выразим R' через L при помощи (42). В результате получим

$$\left[Lr^2 - 2Rr^3 - \frac{\beta}{\kappa} r^4 \left(K_1' - \frac{2K_1}{r} + \frac{4\pi f \rho}{W'} K_1 \right) \right]_c^b = -20\pi f \frac{\nu}{\kappa} \int_c^b pr^4 dr. \quad (50)$$

5. Функция N непрерывна. Ее значение в жидком ядре выражается через δ формулой (20). Проще же использовать (12), так как эквивалентность (20) и (12) обеспечена дифференциальным уравнением (23) и выражением (22), уже использованными при выводе условия (50).

Внося в (12) значения входящих туда функций из (42) и (25), отбрасывая $\omega^2 \psi_1$, будем иметь

$$\left[R + W'H + \frac{N}{\rho_i} + (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\kappa} r^2 \right]_b = 0. \quad (51)$$

6. В граничное условие (50) входит параметр ν , зависящий от ε . Параметр ε определяет вращение системы координат в пространстве. Значение этого параметра можно получить из уравнения моментов

$$\tilde{\mathbf{M}} + [\omega \mathbf{M}] = \mathbf{L}, \quad (52)$$

где \mathbf{M} — кинетический момент, \mathbf{L} — момент внешних сил в подвижной системе координат, ω задана выражением (4). Чтобы не учитывать моменты сил взаимодействия между оболочкой и ядром (давление на границе и гравитационное взаимодействие), применим уравнение моментов ко всей Земле. Проекция кинетического момента на подвижные оси при малых значениях ε и произведений инерции I_{xz} , I_{yz} , I_{xy} таковы:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \omega (A\varepsilon \cos \sigma t - \varepsilon I_{xy} \sin \sigma t - I_{xz}) + \Delta M_x \approx \omega (A\varepsilon \cos \sigma t - I_{xz}) + \Delta M_x; \\ M_y &= \omega (B\varepsilon \sin \sigma t - \varepsilon I_{yz} - \varepsilon I_{yx} \cos \sigma t) + \Delta M_y \approx \omega (A\varepsilon \sin \sigma t - I_{yz}) + \Delta M_y; \\ M_z &= \omega (C - \varepsilon I_{xz} \cos \sigma t - \varepsilon I_{zy} \sin \sigma t) + \Delta M_z \approx \omega C + \Delta M_z, \end{aligned} \right\} (53)$$

где A, B, C — главные моменты инерции ($A = B$), $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ — компоненты кинетического момента относительно подвижной системы координат.

Уравнения (53) справедливы при произвольно малом ε . От ε зависит система скоростей смещений в подвижных координатах, следовательно, компоненты кинетического момента. Можно ε выбрать таким, что эти компоненты исчезнут. Но тогда подвижная система координат была бы связана с осями кинетического момента всей деформирующейся Земли. Однако астрономические наблюдения характеризуют нутацию вектора кинетического момента одной оболочки (если учтены приливные поправки в направлении вертикали). Поэтому в (53) в ΔM_x и ΔM_y не должна учитываться часть (очень малая), обусловленная скоростями только в оболочке.

Тогда все значение ΔM_x (и ΔM_y) определится движениями в жидком ядре. Для вычисления преобразуем первую формулу (19) при помощи (21)

$$(\sigma^2 - 4\omega^2)u = \left(1 - \frac{2\omega}{\sigma}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} - \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\sigma + 2\omega}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right).$$

Аналогично преобразуем вторую формулу:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\sigma + 2\omega)u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2\omega}{2\omega - \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right); \\ \sigma(\sigma + 2\omega)v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{2\omega}{2\omega - \sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right); \\ \sigma^2 \omega &= \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (54)$$

Члены, содержащие производные по λ , в ΔM_x и ΔM_y не войдут (при интегрировании по λ дадут нуль). Поэтому получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{2\omega + \sigma}{\omega} \Delta M_x = \\ & = 2 \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \frac{2\sigma(2\omega + \sigma)}{\omega^2} \int \rho y \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau + \frac{\sigma}{\omega} \int \rho \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

Если использовать (21) и интегрирование по частям, то можно из выражений типа (55) получить

$$\Delta \dot{M}_x = -\sigma \Delta M_y;$$

$$\Delta \dot{M}_y = \sigma \Delta M_x,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Delta M_y = & \frac{2\omega}{\sigma(2\omega + \sigma)} \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \frac{2}{\omega} \int \rho y \frac{\partial \psi}{\partial z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\omega + \sigma} \int \rho \left(y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (56)$$

Внося сюда ψ из (25) и φ из (7), находим

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_y = \left[(\beta - \varepsilon) C_1 + \frac{\sigma}{\omega} \beta (C_1 - A_1) \right] \sin \sigma t + \frac{2\omega^2}{\sigma(2\omega + \sigma)} \int \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau, \quad (57)$$

где C_1 и A_1 — моменты инерции ядра.

Преобразуем интегральный член. Путем интегрирования по частям получаем

$$\int_{\tau} \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau = \int_s \frac{\rho}{r} \psi_1 z y ds - \int_r \frac{\rho'}{r} \psi_1 z y d\tau. \quad (58)$$

Функция ψ_1 выражается бесконечным рядом (33). При интегрировании по сфере $r = \text{const}$ только первый член этого ряда даст результат, отличный от нуля, так как все последующие члены ряда пропорциональны сферическим функциям выше второго порядка и ортогональны к функции второго порядка $\frac{zy}{r^2}$, входящей множителем в (58).

Поэтому на основании (38)

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho y \frac{\partial \psi_1}{\partial z} d\tau &= 3 \sin \sigma t \int_{\tau} \rho y \frac{\partial}{\partial z} (\chi_2 z y) d\tau = 3 \sin \sigma t \int_{\tau} \rho y^2 \left(\chi_2 + \frac{z^2}{r} \chi_2' \right) d\tau = \\ &= \frac{4\pi}{5} \sin \sigma t \int_c^b \rho (\chi_2 r^5)' dr = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Теперь вместо (57) находим

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_y = \left[(\beta - \varepsilon) A_1 + \frac{\sigma v}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \sin \sigma t; \quad (60)$$

$$\frac{1}{\omega} \Delta M_x = \left[(\beta - \varepsilon_1) A_1 + \frac{\sigma v}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \cos \sigma t. \quad (61)$$

Произведения инерции нужно вычислить для всей Земли. Кроме изменения объемного распределения масс, определяемого уравнением Пуассона (13), нужно принять во внимание смещение границ скачка плотности, рав-

носившее добавлению на каждой такой границе простого слоя с плотностью $\frac{\rho\eta}{W'}$. Таким образом,

$$I_{yz} = -\frac{1}{4\pi f} \int \Delta V yz d\tau + \int_s \frac{\rho\eta}{W'} yz ds. \quad (62)$$

Предполагается, что поверхностный интеграл распространен по внешней границе скачка плотности (плотность ρ_e) и внутренней (плотность ρ_i) с учетом изменения знака ds и непрерывности η и W' .

Преобразуя объемный интеграл при помощи формулы Грина и учитывая гармоничность функции yz , получаем

$$\begin{aligned} I_{yz} &= -\frac{1}{4\pi f} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'} \right) yz - V \frac{\partial (yz)}{\partial n} \right] ds \approx \\ &\approx -\frac{1}{4\pi f} \frac{V' - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'} - \frac{2V}{r}}{yz} \int_s y^2 z^2 ds. \end{aligned}$$

Теперь интегрирование должно выполняться только по поверхности Земли, так как интегралы по внутренним границам скачка плотности равны нулю из-за непрерывности функции $V' - 4\pi f \frac{\rho\eta}{W'}$.

Учитывая условие на поверхности (43), получаем

$$I_{yz} = \frac{x}{3} ma^2 k \sin \sigma t. \quad (63)$$

Внося (61) и (63) в (54), находим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m \cos \sigma t; \\ M_y &= m \sin \sigma t; \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где

$$\frac{m}{\omega} = (A - A_1) \varepsilon + \beta A_1 + \frac{\sigma v}{2\omega} (C_1 - A_1) - \frac{x}{3} ma^2 k. \quad (65)$$

Проекция на подвижные координатные оси момента внешних сил находим из (4):

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L \sin \sigma t; \\ L_y &= -L \cos \sigma t; \\ L &= \frac{g}{a} x (C - A). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Внося (64) — (66) в уравнение моментов (52), получаем одно уравнение, не содержащее времени:

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \left[\frac{A - A_1}{C} \varepsilon + \frac{A_1}{C} \beta + \frac{\sigma v}{2\omega} \frac{(C_1 - A_1)}{C} - \frac{x}{3} \frac{ma^2}{C} k \right] = x \frac{C - A}{Cq} \quad (67)$$

Если бы Земля была абсолютно твердой, то соответствующее значение ε_0 определилось бы из уравнения

$$\varepsilon_0 - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \frac{A}{C} \varepsilon_0 = x \frac{C - A}{Cq}. \quad (68)$$

При отсутствии внутреннего ядра из уравнений (45), (47), (48), (50), (51), (67), (68) можно определить числа Лява h, k и l , параметры β_1, α_1 и отношение $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ для суточных приливов ($\alpha_2 = 0$).

7. Для модели Земли с твердым внутренним ядром отпадают условия центра для функций χ_n и K и добавляются новые условия на границе внутреннего ядра. Меняется также уравнение моментов.

Учитывая малую достоверность сведений о внутреннем ядре, ничтожность его момента инерции, примем для упрощения вычислений это ядро однородным и несжимаемым. Тогда для внутреннего ядра можно использовать хорошо известное простое аналитическое решение

$$H = C_1 r + C_2 r^3; \quad T = \frac{1}{2} C_1 r^2 + \frac{5}{6} C_2 r^4; \quad R = C_3 r^2.$$

Поэтому

$$R' = \frac{2}{r} R; \quad (69)$$

$$M = \bar{\mu} r^2 \left(\frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right); \quad (70)$$

$$N + \bar{\rho} (R + W'H) = \bar{\mu} \left(\frac{13}{2} \frac{H}{r} - 9 \frac{T}{r^2} \right), \quad (71)$$

где $\bar{\mu}$ и $\bar{\rho}$ — соответственно модуль сдвига и плотность в ядре.

На границе $r = c$ внутреннего ядра с жидкостью должны выполняться условия непрерывности M, N, R, L и H . Условия непрерывности первых четырех функций такие же, как (45), (47), (48), (50) для границы основного ядра. Упрощение заключается в возможности использования (69)—(71).

Напишем эти условия.

1. Непрерывность M . Из (70) получаем

$$\left(\frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right)_{r=c} = 0. \quad (72)$$

2. Непрерывность R . Из (47) находим

$$\left[R \right]_{r=c} = \left[\frac{\alpha_1}{x} K_1 + \frac{\alpha_2}{x} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{x} r^2 \right]_{r=c}. \quad (73)$$

3. Непрерывность L . Из (48) и (69) получаем

$$\left[\frac{2}{r} R + 4\pi f (\rho_i - \bar{\rho}) H \right]_{r=c} = \left[\frac{\alpha_1}{x} K_1' + \frac{\alpha_2}{x} K_2' - 2(2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{x} r \right]_{r=c}. \quad (74)$$

4. Непрерывность N . Из (49), (71) и (72) находим

$$\left[(\rho_i - \rho) (R + HN') + \frac{19}{5} \mu \frac{H}{r} + (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{x} \rho_i r^2 \right]_{r=c} = 0. \quad (75)$$

5. Непрерывность H . Из-за сжатия внутреннего ядра возможно его вращение относительно оболочки, которое можно представить формулой

$$\omega_1 = \omega \varepsilon_2 (\cos \sigma t \mathbf{i} + \sin \sigma t \mathbf{j}). \quad (76)$$

Поэтому скорости относительных смещений $[\omega_1 \mathbf{r}]$ имеют компоненту, нормальную к границе внутреннего ядра, равную величине

$$\frac{1}{W'}([\omega_1 \mathbf{r}] \text{ grad } W) = \omega \varepsilon_2 \sin(\sigma t - \lambda) e^2 r \frac{lz}{r^2}.$$

Следовательно, дополнительная компонента смещения равна

$$\frac{\omega}{\sigma} \varepsilon_2 e^2 r \cos(\sigma t - \lambda) \frac{lz}{r^2}.$$

Однако этот член лежит за пределами точности граничного условия. Поэтому условие непрерывности H выражается формулой (49).

Наличие внутреннего ядра меняет уравнение моментов, выраженное формулой (67). Из-за изменения пределов интегрирования в (56) в формулу (67) вместо C_1 и A_1 войдут моменты инерции жидкого слоя, заключенного между границами основного и внутреннего ядра $C_1 - C_2$ и $A_1 - A_2$, где C_2 и A_2 — моменты инерции внутреннего ядра. Вместе с тем к m нужно добавить кинетический момент $\varepsilon_2 \omega A_2$, возникающий вследствие вращения внутреннего ядра относительно средних осей оболочки. Поэтому вместо (65) получим

$$\begin{aligned} \frac{m}{\omega} = & A\varepsilon + (\beta - \varepsilon)(A_1 - A_2) + \frac{\sigma v}{\omega} [(C_1 - C_2) - (A_1 - A_2)] - \\ & - \frac{\kappa}{3} ma^2 k + A_2 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (77)$$

Для исключения ε_2 следовало бы использовать уравнение, подобное (67), составленное для одного внутреннего ядра. Однако в этом нет необходимости, так как $A_2 \approx 10^{-3} A$, $\varepsilon_2 < \varepsilon$, поэтому член $A_2 \varepsilon_2$ можно отбросить. Кроме того, мал третий член по сравнению с первым ($\approx \frac{1}{3} 10^{-3} A \varepsilon$). В результате этих упрощений вместо (67) находим

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{C\omega} [A\varepsilon + (\beta - \varepsilon)(A_1 - A_2) - \frac{\kappa}{3} ma^2 k] = \kappa \frac{C - A}{Cq}. \quad (78)$$

Этим уравнением и условием (50) определяется частота свободных колебаний, соответствующих чандлеровскому периоду движения полюса. Из (50) следует, что при малом значении $\sigma = \sigma_0$

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\sigma_0 + \omega}{\omega}.$$

Из (20) следует, что при $V_e = 0$

$$V = \frac{\sigma_0 + \omega}{\omega} \varphi + V_i = -\omega(\sigma_0 + \omega) \varepsilon \frac{lz}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) + V_i,$$

т. е. при свободных колебаниях в левой части (78) нужно принять

$$\kappa = -\frac{\sigma_0 + \omega}{\omega} q \varepsilon \approx -q \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{3} ma^2 q = \frac{C - A}{k_0},$$

где

$$k_0 = \left(\frac{3 - \xi}{2 + \xi} \right)_a = \left(\frac{e^2}{q} - 1 \right)_a \quad (79)$$

— значение k для целиком жидкой Земли. Внося эти значения в левую часть (78) и приравнявая ее нулю, получаем

$$\varepsilon \left[(C - A) \left(1 - \frac{k}{k_0} \right) - \frac{\sigma_0}{\omega} \left(A - A_1 + A_2 + (C - A) \frac{k}{k_0} \right) \right] = 0.$$

Отсюда с достаточным приближением имеем

$$\frac{\sigma_0}{\omega} = \frac{C - A}{A - A_1} \left(1 - \frac{k}{k_0} \right). \quad (80)$$

Это выражение было использовано автором в работе [7], но без достаточного обоснования. Входящее в него значение k следует брать из статической теории, так как

$$\beta \approx \varepsilon, \quad \frac{\sigma_0 (\sigma_0 + 2\omega) \beta}{\alpha} \approx - \frac{2\sigma_0}{\omega},$$

следовательно, $\psi \approx 0$.

8. Вычисления выполнены в двух вариантах. В первом варианте модель Земли построена без внутреннего ядра. Модель и функции $\Phi(r)$, характеризующие смещения, напряжения и потенциал, взяты из работы [7] и там подробно описаны. В оболочке прирост плотности принят немного больше (в среднем на 40%) прироста в результате сжимаемости. Ядро построено с нормальным изменением плотности, соответствующим адиабатической сжимаемости. Сжатие Земли принято равным 1:298,3. На границе основного ядра

$$V' = -1,104g, \quad \frac{C_1}{C} = 0,1180, \quad e^2 = 5092 \cdot 10^{-6}.$$

Для второго варианта использовано новое интегрирование уравнений (11), выполненное автором и М. В. Крамер на электронной счетной машине «Урал-1». В этом варианте плотности в оболочке практически совпадают со значениями Буллена, поэтому построено внутреннее ядро (со значениями плотности заметно большими, чем у Буллена). Сжатие Земли принято равным 1:297. На границе основного ядра $V' = -1,044g$, $\frac{C_1}{C} = 0,1060$, $e^2 = 5072 \cdot 10^{-6}$.

Т а б л и ц а 1

Значения функций $\Phi(r)$ при $r=0,55$

	М о д е л ь II					(II-I) · 10 ³				
	$\frac{\partial \Phi}{\partial k} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial k} - 3 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial h}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial l}$		$\frac{\partial \Phi}{\partial k} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial k} - 3 \frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial h}$	$\frac{\partial \Phi}{\partial l}$	
R	+0,3861	+ 5,9046	-2,3903	- 1,6023		+ 10	-30	- 44	- 128	
T	-0,1390	- 0,1910	+0,3836	+ 1,2986		+ 9	+14	- 2	- 36	
H	+0,1848	+ 0,7283	+0,9171	- 4,0549		- 19	-29	- 37	- 288	
L	-0,0783	-10,3068	+3,5559	+ 7,4964		+ 5	+70	+ 79	+ 126	
M	+0,3833	+ 0,7053	-0,4793	- 3,7155		- 4	+ 6	- 39	- 71	
N	-3,2203	-12,7988	+5,5007	+47,767		+114	-86	+381	+1100	

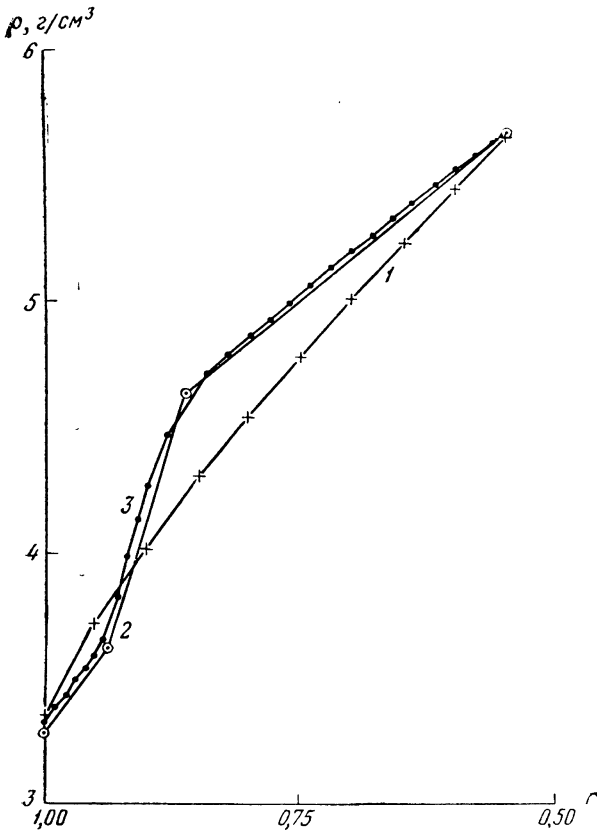


Рис. 1. Плотности в оболочке для моделей I, II и по Буллену
1 — модель I; 2 — модель II; 3 — по Буллену

Плотности в оболочке для обеих моделей изображены на рис. 1. Для сравнения приведены плотности по Буллену. Более подробные данные о моделях содержатся в работах [7] и [8].

Значения функций $\Phi(r)$ входят в условия на границе основного ядра $r = b = 0,55$. В табл. 1 даны значения этих функций для модели II и разности значений для второй и первой модели, умноженные на 10^3 .

Здесь даны значения только тех частных интегралов, которые входят в граничные условия. Значения $\frac{\partial\Phi}{\partial M_0}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial N_0}$ [не используются из-за отсутствия напряжений на поверхности Земли.

Для модели I из-за условия центра $\alpha_2 = 0$ и $\left(\frac{K'_1}{K'}\right)_b$ вычислено по формуле (41). Для модели II (с внутренним

ядром) функции K_1 и K_2 получены численным интегрированием уравнения (30). В точке $r = b = 0,55$ принято $K_1(0,55) = 1$ и по формуле (41) получено $K'_1(0,55) = 3,261$. Интегрирование уравнения (30) дало

$$K_1(0,20) = +0,1894, \quad K'_1(0,20) = +0,688.$$

Далее из формулы (40') получено

$$\begin{aligned} K_2(0,55) &= 0, & K'_2(0,55) &= +3,306, \\ K_2(0,20) &= -7,094, & K'_2(0,20) &= +106,24. \end{aligned}$$

Далее использованы условия (45), (47), (48) и (51), в которые частота σ входит только в комбинации $\sigma(\sigma + 2\omega)\beta$. Из этих уравнений h, k, l, α выражены через β (и α_2 для второй модели). Получено

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,6206 + 0,4711 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta; \\ k &= 0,3070 + 0,2384 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta; \\ l &= 0,0904 - 0,0112 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta; \\ \alpha_1 &= 0,6092 + 0,3264 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma + 2\omega)}{\omega^2} \beta; \end{aligned} \right\} \text{Модель I}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= 0,6168 + 0,4276 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0916 \alpha_2; \\ k &= 0,3015 + 0,2109 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,1125 \alpha_2; \\ l &= 0,0808 - 0,0152 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0095 \alpha_2; \\ \alpha_1 &= 0,5625 + 0,2475 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,4300 \alpha_2. \end{aligned} \right\} \text{Модель II}$$

Из этих уравнений получаем

$$k = 0,495h + 0,0054 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta; \quad \text{Модель I}$$

$$k = 0,489h + 0,0019 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta - 0,0677 \alpha_2. \quad \text{Модель II}$$

Таким образом, отношение $\frac{k}{h}$ очень слабо зависит от β и практически равно его статическому значению (при $\beta = 0$).

Значение α_2 для второй модели определяется условиями на границе внутреннего ядра (73) — (75). Вычисления выполнены для двух крайних случаев: во внутреннем ядре принято $\mu = \infty$ и $\mu = 0$. Получено

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= +0,0038 + 0,0087 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta \quad (\mu = \infty); \\ \alpha_2 &= -0,0015 + 0,0139 \cdot 10^{-3} \frac{\sigma(\sigma+2\omega)}{\omega^2} \beta \quad (\mu = 0). \end{aligned} \right\} \text{Модель II}$$

Отсюда видно, что влияние внутреннего ядра на приливные коэффициенты незначительно. Это влияние будет еще меньше, если снизить значение плотности во внутреннем ядре до более правдоподобного значения. Но так как значения модуля сдвига и плотности установить очень трудно, с достаточным приближением можно принять $\alpha_2 = 0$ (это приближение непригодно для вычисления деформации внутреннего ядра, но не скажется на числах Лява и амплитуде нутации).

Теперь остается использовать условия (50) и (67). Так как функции $\Phi(b)$, определяемые формулой (44), зависят теперь только от β , в условия (50) и (67) войдут только β и ε . Разрешая эти уравнения и отбрасывая члены, которые не скажутся на результатах вычислений, получаем

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{41,87}{0,2136 - 100 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}} + 1,9; \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} &= 1 + \frac{C_1 q}{C - A} (\beta - 4,3) \frac{\sigma + \omega}{\omega}; \end{aligned} \right\} \text{Модель I}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{41,15}{0,2159 - 100 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}} + 1,7; \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} &= 1 + \frac{C_1 q}{C - A} (\beta - 4,1) \frac{\sigma + \omega}{\omega} \end{aligned} \right\} \text{Модель II}$$

Параметр $\frac{C_1 q}{C - A}$ равен 0,1250 для модели I и 0,1124 для модели II. Различие этих чисел является наибольшим для обеих моделей. Частоты свободных колебаний

$$\frac{\sigma_0 + \omega}{\sigma_0} = 2136 \cdot 10^{-6}; \quad \text{Модель I}$$

$$\frac{\sigma_0 + \omega}{\sigma_0} = 2159 \cdot 10^{-6} \quad \text{Модель II}$$

различаются приблизительно на 2 сек.

В табл. 2 даны значения β и $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$ для основных суточных волн. Для сравнения приведены значения $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$, полученные Джеффрисом и Висентом для двух моделей (ядро однородное — модель I, плотность в ядре меняется по закону Роша — модель II).

Таблица 2

Значения β и $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$\frac{\sigma + \omega}{\omega}$	β		$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$			
	Модель I	Модель II	Модель I	Модель II	Модель I (Дж.)	Модель II (Дж.)
$-\frac{1}{13,7}$	- 4,5	- 4,6	+80	+71	+76,8	+ 67
$-\frac{1}{183}$	-125,1	-123,9	+88,4	+78,6	+89,5	+142
$-\frac{1}{6800}$	+212,4	+206,4	- 3,83	- 3,34	- 3,6	- 1,11
$+\frac{1}{6800}$	+185,3	+180,3	+ 3,33	+ 2,91	+ 3,6	+ 1,20
$+\frac{1}{183}$	+ 56,8	+ 55,5	+35,9	+31,6	+35,0	-29,3
$+\frac{1}{13,7}$	+ 7,1	+ 6,8	+26	+22	+26,9	+26,6

Значения h , k , l , γ и δ для основных суточных волн даны в табл. 3.

На рис. 2 представлены значения δ для модели II в функции $\frac{\sigma + \omega}{\sigma}$.

Сравним вычисленные нами амплитуды нутационных членов с их наблюдаемыми значениями, полученными Федоровым [6] по материалам Международной службы широт. Теоретические значения амплитуд нутации для абсолютно твердой Земли ε_0 возьмем из работы Джеффриса [5]. Однако эти значения нуждаются в исправлении, так как у Джеффриса использовано явно ошибочное значение синуса угла наклона экватора к эклиптике (0,39738 — вместо правильного значения 0,39799 для эпохи 1900,0). Вместе

с тем мы используем значение параллакса Рабэ, а не Спенсер Джонса. Таким образом, получаем теоретические значения для абсолютно твердой Земли нутации в наклонности

$$9'',2232 \cos \varOmega + 0'',0944 \cos 2 \varOmega + 0'',5558 \cos 2 \odot$$

и долготе

$$6'',8672 \sin \varOmega + 0'',0876 \sin 2 \varOmega + 0'',5104 \sin 2 \odot$$

вместо принятых Джеффрисом

$$9'',2262 \cos \varOmega + 0'',0945 \cos 2 \varOmega + 0'',5528 \cos 2 \odot;$$

$$6'',8594 \sin \varOmega + 0'',0875 \sin 2 \varOmega + 0'',5068 \sin 2 \odot$$

и Федоровым

$$9'',220 \cos \varOmega + 0'',0834 \cos 2 \varOmega + 0'',552 \cos 2 \odot;$$

$$6'',869 \sin \varOmega + 0'',0812 \sin 2 \varOmega + 0'',507 \sin 2 \odot.$$

Кажется очевидным, что все использованные Федоровым материалы службы широт обработаны со значением нутационной постоянной по Ньюкомбу ($9'',210$) и полученные Федоровым поправки ($-0'',0128 \cos \varOmega$ и $-0'',0120 \sin \varOmega$)

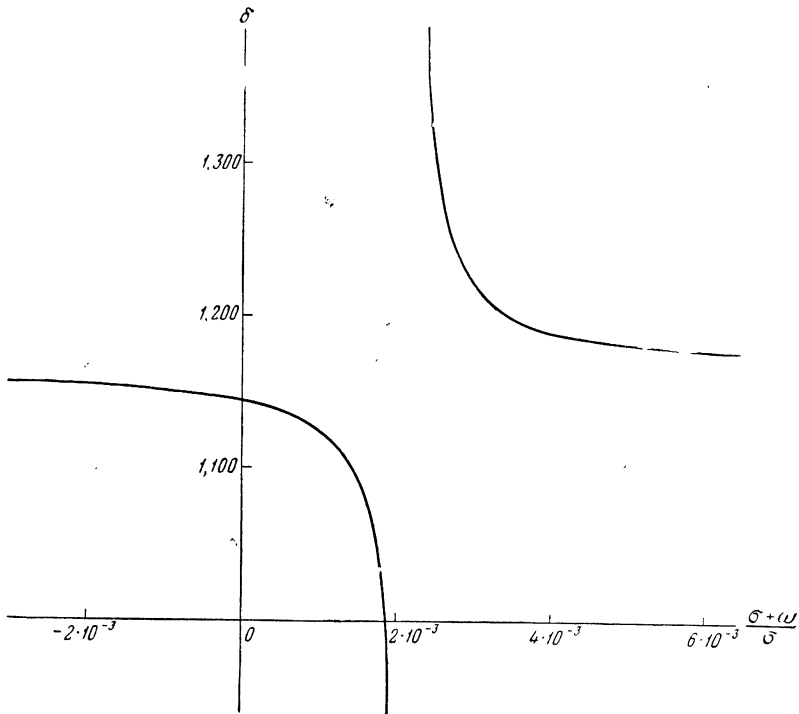


Рис. 2. Изменение δ в зависимости от частот приливных волн

относятся к полуосям нутационного эллипса Ньюкомба. В таком случае постоянной нутации $9'',2232$ должны соответствовать поправки к полуосям: $-0'',0128 - 0'',0132 = -0'',0260$ и $-0'',0120 - 0'',0132 \frac{6,87}{9,22} = -0'',0218$. Эти величины мы считаем более достоверными, чем полные значения полуосей.

Числа Лява для суточных приливов

Модель	$\frac{\sigma+\omega}{\omega}$	$-\frac{1}{13,7}$	$-\frac{1}{183}$	$-\frac{1}{6800}$	0,0	$+\frac{1}{6800}$	$+\frac{1}{183}$	$+\frac{1}{13,7}$
I Мол.	h	0,623	0,680	0,521		0,533	0,594	0,617
II Мол.		0,611	0,670	0,528		0,540	0,593	0,614
I Дж.		0,590	0,523	0,490	0,492	0,494	0,555	0,584
II Дж.		0,597	0,710		0,551		0,568	0,603
I Мол.	k	0,308	0,337	0,256		0,263	0,294	0,305
II Мол.		0,302	0,328	0,258		0,264	0,290	0,300
I Дж.		0,244	0,218	0,205	0,206	0,207	0,231	0,242
II Дж.		0,258	0,298		0,244		0,264	0,261
I Мол.	l	0,0904	0,0890	0,0927		0,0924	0,0910	0,0905
II Мол.		0,0807	0,0789	0,0840		0,0836	0,0817	0,0809
I Дж.		0,082	0,084	0,086	0,086	0,086	0,082	0,082
II Дж.		0,070	0,072		0,082		0,084	0,078
I Мол.	δ	1,161	1,174	1,136		1,139	1,154	1,159
II Мол.		1,165	1,178	1,142		1,145	1,158	1,164
I Дж.		1,224	1,196	1,182	1,183	1,184	1,209	1,221
II Дж.		1,210	1,263		1,185		1,172	1,211
I Мол.	γ	0,685	0,658	0,734		0,728	0,699	0,688
II Мол.		0,684	0,658	0,730		0,724	0,697	0,686
I Дж.		0,654	0,695	0,715	0,714	0,713	0,676	0,658
II Дж.		0,661	0,588		0,693		0,696	0,658

Приливная волна: 00

 K_1 P_1 O_1

Нутационная волна:

Главная
19-летняяГлавная
полугодоваяГлавная
двухнедельная

Тогда разности между теоретическими значениями наблюдаемыми (с учетом исправления, которое Федоров сообщил в письме к Джеффрису [5]) получаются следующими:

$$\begin{aligned}
 & (-0'',0260 \pm 0'',002) \cos \varOmega + (+0'',005 \pm 0'',001) \cos 2\varDelta + \\
 & \quad + (+0'',022 \pm 0'',004) \cos 2\odot; \\
 & (-0'',0218 \pm 0'',002) \sin \varOmega + (+0'',0042 \pm 0'',001) \sin 2\varDelta + \\
 & \quad + (+0'',023 \pm 0'',004) \sin 2\odot.
 \end{aligned}$$

Разложим движения полюса на круговые, используем таблицу значений $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ и получим следующие теоретические значения тех же разностей: для рассмотренных двух моделей не идеально твердой Земли:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & -0'',0269 \cos \varOmega + 0'',0025 \cos 2\varDelta + 0'',0212 \cos 2\odot; \\ & -0'',0347 \sin \varOmega + 0'',0023 \sin 2\varDelta + 0'',0170 \sin 2\odot. \end{aligned} \right\} \text{Мод. I} \\
 & \text{и} \\
 & \left. \begin{aligned} & -0'',0235 \cos \varOmega + 0'',0021 \cos 2\varDelta + 0'',0187 \cos 2\odot; \\ & -0'',0303 \sin \varOmega + 0'',0019 \sin 2\varDelta + 0'',0151 \sin 2\odot. \end{aligned} \right\} \text{Мод. II}
 \end{aligned}$$

Числа, относящиеся к модели II, приблизительно на 10% меньше, так как на 10% меньше момент инерции ядра во второй модели. Наибольшее расхождение между наблюдаемым и теоретическим значениями поправки получается в малой полуоси нутационного эллипса ($0'',0085 \pm 0'',002$, и $0'',0129 \pm 0'',002$ для моделей II и I). Расхождение еще уменьшилось бы с уменьшением момента инерции ядра. Значения постоянной нутации по Ситтеру ($9'',2075 \pm 0,0020$) и Спенсеру Джонсу ($9'',2134 \pm 0'',0042$) лучше согласуются с еще меньшим моментом инерции ядра.

Период Чандлера получим по формуле (80). Статическое значение k равно 0,3070 (модель I) и 0,3015 (модель II), поправки в значении k за подвижность вод океанов равны $+0,0465$ (модель I) и $+0,0506$ (модель II).

Таким образом, исправленные значения k равны соответственно 0,3535 и 0,3521. Далее получаем $k_0 = 0,934$ (модель I) и $k_0 = 0,942$ (модель II) и $T_c = 433$ дня (модель I) и $T_c = 436$ дней (модель II). Эти значения близки к принимавшемуся ранее значению $T_c = 433$ дня, но заметно отличаются от значения Джеффриса $T_c = 448 \pm 7$ дней. Вычисленные нами значения периода Чандлера увеличатся с уменьшением момента инерции ядра.

Полученное Федоровым запаздывание фаз вынужденной нутации и наблюдаемое запаздывание фаз земных приливов ставят вопрос об учете влияния вязкости оболочки. Этот вопрос нуждается в специальном рассмотрении.

Приношу благодарность Л. В. Парийской и М. В. Крамер за вычисления, выполненные для этой работы, и Н. Н. Парийскому за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947, стр. 913—918.
2. Jeffreys H. Mon. Not., 1949, **109**, 670—687.
3. Jeffreys H., Vicente R. Mon. Not., 1957, **117**, 142—161.
4. Jeffreys H., Vicente R. Mon. Not., 1957, **117**, 162—173.
5. Jeffreys H. Mon. Not., 1959, **119**, 75—80.
6. Федоров Е.П. Нутация и вынужденные движения полюса Земли. Изд. АН УССР, 1958.
7. Молоденский М. С. Труды Геофизического ин-та АН СССР, 1953, № 19 (146), 3—52.
8. Молоденский М. С., Крамер М. В. Наст. сб., стр. 26.

М. С. Молоденский, М. В. Крамер

ЧИСЛА ЛЯВА
ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ
2 и 3-ГО ПОРЯДКОВ

В теории приливов потенциал приливообразующей силы разлагается на элементарные гармонические члены, пропорциональные основным и присоединенным полиномам Лежандра, начиная со 2-го порядка. Члены второго порядка являются основными; однако и члены 3-го порядка сказываются на результатах наблюдений и могут быть определены с повышением точности измерений.

Приливные вариации силы тяжести, наклонов и направления отвесной линии на поверхности Земли выражаются через числа Лява h , k и l^1 . Для приливов 2-го порядка эти числа наиболее надежно получены путем численного интегрирования уравнений теории упругости для нескольких моделей Земли. Такеучи [1] выполнил интегрирование для двух вариантов распределения плотности в оболочке. В первом варианте плотности взяты по Буллону [2], во втором варианте Такеучи изменил модель Буллона и на глубине 500 км плотность возрастает скачком, а далее имеет немного меньшие значения. Молоденский [3] произвел вычисления для трех вариантов распределения плотности в оболочке: 1) плотность определена из дифференциального уравнения $\rho' = \frac{\rho^2}{\lambda} V'$, поэтому прирост плотности в среднем на 40% больше, чем за счет чистой сжимаемости; 2) плотность в оболочке постоянна; 3) внутри всей Земли плотность меняется непрерывно по закону Лежандра. Последние два варианта рассчитаны для выявления степени зависимости чисел Лява от принятого закона распределения плотности в оболочке. Альтерман, Ярош и Пекерис [4] выполнили вычисления еще для трех вариантов распределения плотности: 1) модель Булларда I; 2) модель Булларда II и 3) модель Буллона B. Значения чисел Лява получены этими авторами также с учетом инерционных членов для приливов с периодом $6,6\sqrt{2}$ и 12 час. Однако при этом не учтены члены, представляющие ускорения Кориолиса, величина которых имеет один порядок с инерционными

¹ l называют также числом Ламберта или числом Шидо.

членами для полусуточного прилива. Поэтому только статистические значения чисел Лява у этих авторов имеют реальное значение.

В табл. 1 сопоставлены основные результаты выполненных вычислений (см. также рис. 1 и 2).

Значения, полученные Джеффрисом и Висентом [5] для модели Такеучи, в таблицу не включены, так как отличаются от значений Такеучи главным образом за счет приближенности теории.

Числа для модели, помещенной в табл. 1 под № 3, взяты из статьи [6]. Вычисления выполнены на электронной счетной машине «Урал-1» приблизительно в 10 раз точнее, чем это сделано в работе [3]. Программа вычислений составлена М. В. Крамер. В этом варианте плотности в оболочке очень близки к плотностям по Буллину [2], однако точно не совпадают с ними. Скорости сейсмических волн также близки к наблюдаемым, но точно им не равны. В самом деле, вычисление приливных деформаций оболочки требует решения системы шести диффе-

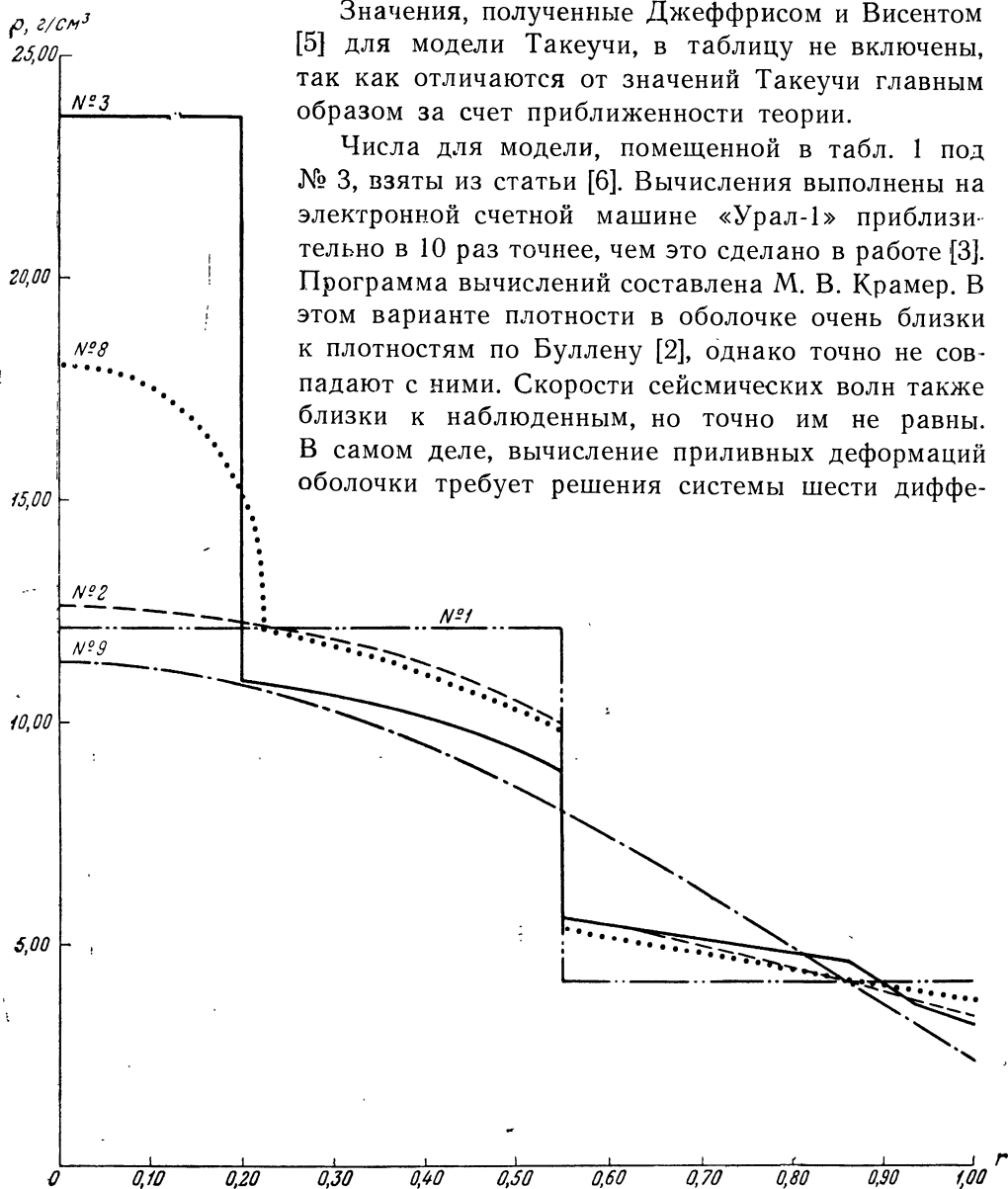


Рис. 1. Значения плотностей, принятых для моделей № 1, 2, 3, 8 и 9

ренциальных уравнений 6-го порядка, в которой коэффициенты зависят от скоростей сейсмических волн и плотности. Так как эта система эквивалентна одному уравнению 6-го порядка, то в вычислениях будут играть роль шестые производные от коэффициентов, определяемые шестыми

разностями таблицы значений коэффициентов. Если коэффициенты представлены эмпирической таблицей, то с увеличением порядка разностей в них начнут доминировать незакономерные колебания, связанные с не-

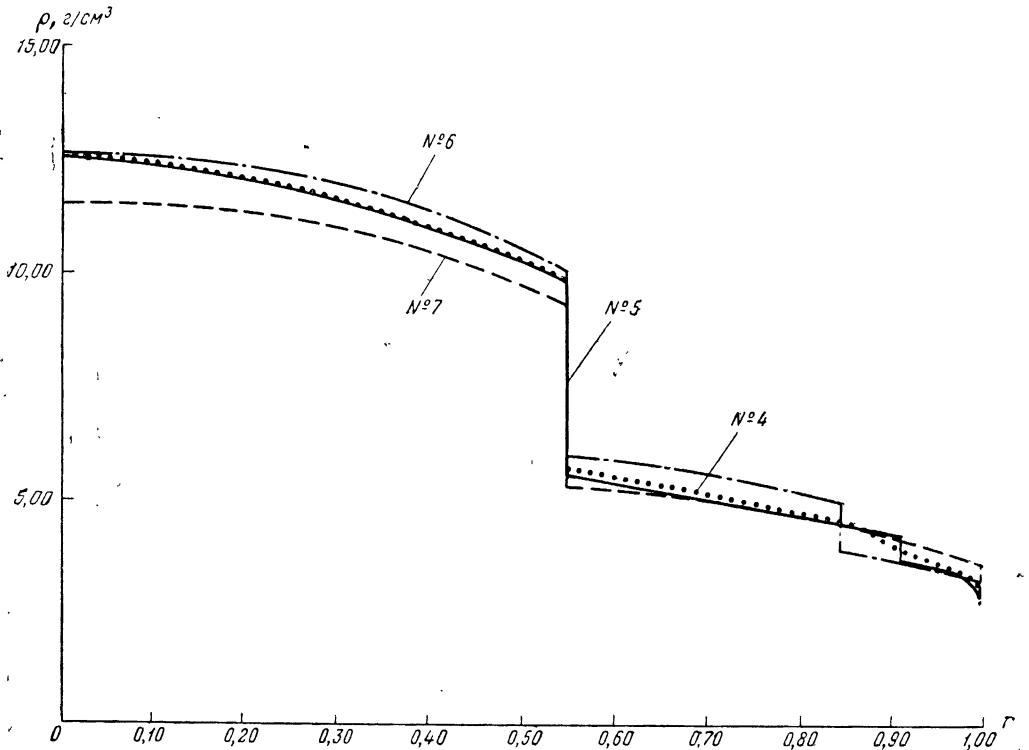


Рис. 2. Значения плотностей принятых для моделей № 4, 5, 6 и 7

точностью исходных данных. Поэтому как плотности, так и скорости волн нами несколько сглажены и представлены простыми формулами. Этого принципа мы придерживались в работе [3] и считали необходимым сохранить его.

Таблица 1

Числа Лява для статических приливов второго порядка, полученные численным интегрированием

№ п/п	Плотность	h	k	l	Автор
1	Рис. 1, кривая № 1	0,662	0,327	0,107	Молоденский [3]
2	» 1 » № 2	0,621	0,307	0,090	Молоденский [6]
3	» 1 » № 3	0,617	0,302	0,081	Молоденский [6]
4	» 2 » № 4	0,587	0,290	0,068	Такеучи [1]
5	» 2 » № 5	0,610	0,281	0,082	Такеучи [1]
6	» 2 » № 6	0,591	0,275	0,086	Альтерман, Ярош и Пекерис [4]
7	» 2 » № 7	0,577	0,275	0,078	Альтерман и др. [4]
8	» 1 » № 8	0,590	0,275	0,086	Альтерман и др. [4]
9	» 1 » № 9	0,567	0,287	0,074	Молоденский [3]

В варианте № 3 плотности в оболочке по Буллену и функции μ/ρ и $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ представлены тремя прямолинейными отрезками, соединяющими следующие точки:

r	$\rho,$ г/см ³	$\mu/\rho,$ км ² /сек ²	$(\lambda + 2\mu)/\rho,$ км ² /сек ²
1,00	3,28	18,26	58,03
0,94	3,62	25,27	82,20
0,86	4,64	40,16	129,25
0,55	5,69	54,24	190,90

Интегрирование начиналось с шагом, 0,0025 (в долях радиуса Земли), затем шаг увеличивался до 0,01. В точках скачка производной от плотности интегрирование начиналось вновь малым шагом. Пренебрежение этим правилом привело бы к заметным ошибкам. На рис. 3

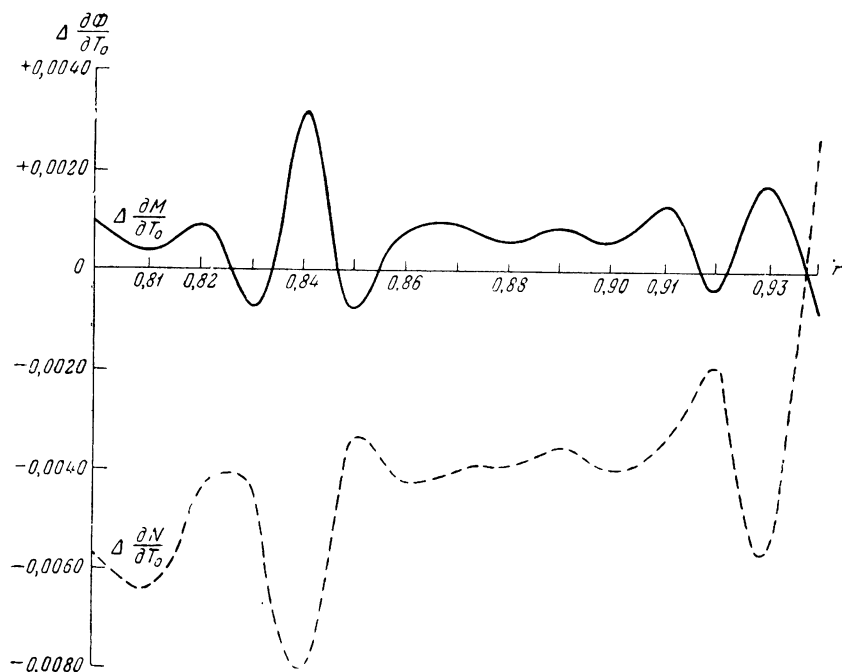


Рис. 3. Погрешности интегрирования при «сквозном» счете через точки скачка производных

показаны разности значений функций, полученные при «сквозном» счете (не обращая внимания на скачок ρ') с точными значениями, полученными с использованием только левых производных слева и только правых справа от точки скачка ρ' . При сквозном счете у функций появляется фиктивный всплеск, оставляющий след на последующих значениях функции.

Если бы коэффициенты уравнений были заданы таблицей с невыравненными разностями, то подобное явление проявилось бы в более сложной форме. Не является ли это обстоятельство одной из причин некоторой противоречивости чисел, собранных в табл. 1?

Исходной системе дифференциальных уравнений придан следующий вид:

$$M = r^2 \mu \left(T' + H - \frac{2}{r} T \right) \quad (1)$$

$$N = (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left(\frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T \right) \quad (2)$$

$$L = r^2 (R' - 4\pi\kappa\rho H); \quad (3)$$

$$M' = -Nr^2 - \rho r^2 (R + N'H) + 2\mu [H'r^2 - Hr + (n^2 + n - 1)T]; \quad (4)$$

$$N' = \frac{n(n+1)}{r^2} M - \frac{\rho}{r^2} [L - 4N'rH + n(n+1)TW'] - \\ - \frac{2\mu}{r} \left(2H' - \frac{2H}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} T \right); \quad (5)$$

$$L' = n(n+1)(R - 4\pi\kappa\rho T). \quad (6)$$

В этих уравнениях функции H , T , M , N , R и L сохраняют непрерывность на границах скачка плотности ρ или коэффициентов упругости μ и λ , так как H и T пропорциональны компонентам смещения, M и N — компонентам напряжения, R — потенциалу; функция L непрерывна на основании известных свойств производной от потенциала объемных масс и простого слоя.

Общий интеграл этой однородной системы уравнений можно представить в виде

$$\Phi(r) = H_0 \frac{\partial\Phi}{\partial H_0} + T_0 \frac{\partial\Phi}{\partial T_0} + R_0 \frac{\partial\Phi}{\partial R_0} + L_0 \frac{\partial\Phi}{\partial L_0} + M_0 \frac{\partial\Phi}{\partial M_0} + N_0 \frac{\partial\Phi}{\partial N_0}, \quad (7)$$

где $\Phi(r)$ — одна из функций H , T , R , L , M или N ; H_0 , T_0 , R_0 , L_0 , M_0 и N_0 — произвольные постоянные: $\frac{\partial\Phi}{\partial H_0}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial T_0}$, \dots , — частные интегралы.

Таким образом, частный интеграл $\frac{\partial\Phi}{\partial H_0}$ получен при следующих граничных условиях в точке $r=1$: $H=1$, $T=R=L=M=N=0$. Интеграл $\frac{\partial\Phi}{\partial T_0}$ получен при граничных условиях: $T=1$; $H=R=L=M=N=0$; и т. д. Так были вычислены значения всех шести функций, входящих в каждый частный интеграл. Вычисления выполнены при $n=2$ (прилив 2-го порядка) и при $n=3$ (прилив 3-го порядка).

Результаты представлены в табл. 2 (прилив 2-го порядка) и в табл. 3 (прилив 3-го порядка).

Для сравнения интегральных кривых, соответствующих моделям № 2 и 3 табл. 1, мы использовали табл. 5 и вторую половину табл. 9 на стр. 46 работы [3]. В них содержатся пять частных интегралов, полученных при

условии $M(1) = 0$, поэтому из них нельзя получить частный интеграл, который мы символически обозначаем как $\frac{\partial \Phi}{\partial M_0}$. Из табл. 5 получены интегралы $\frac{\partial \Phi}{\partial H_0}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial T_0}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial L_0}$. После этого интегральная кривая на стр. 46 работы [3] определила $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$.

В табл. 4 помещены разности значений функций для старой и новой модели (при $n = 2$). Наибольшие разности (от 4 до 62%) получились в интегралах $\frac{\partial \Phi}{\partial N_0}$, которые не используются при вычислении чисел Лява. В остальных интегральных кривых расхождения не превышают 8%, а их влияние на числа h и k меньше верхнего предела расхождений. Числа, помещенные в табл. 1 под № 2 и 3, взятые из статьи [6], — статические значения чисел Лява для моделей I и II этой статьи. Они получены при помощи табл. 2 и 4.

При помощи табл. 3 просто получаются числа Лява для приливов 3-го порядка. Для оценки влияния неоднородности жидкого ядра мы приняли, что плотность в ядре меняется по закону Лежандра и параметр Радо $\eta = 0,240$ — максимальное значение, соответствующее кривой № 3 на рис. 1. В этом случае функция R в ядре определяется точным выражением из работы [3] (формула после (2.13)). Значению $\eta = 0,240$ соответствует $\left(\frac{R'}{R}\right)_i = 2,61$, а значению $\eta = 0$ (однородное ядро) — $\left(\frac{R'}{R}\right)_i = 3$. Используя граничные условия (3.1) — (3.6) работы [3], при $n = 3$ получаем

	h_3	k_3	l_3	δ_3
$\eta = 0$ однородное ядро	0,293	0,095	0,0135	1,069
$\eta = 0,240$; $\rho_i = 9,30 \text{ г/см}^3$	0,294	0,095	0,0134	1,069
$\eta = 0,240$; $\rho_i = 10,30 \text{ г/см}^3$	0,294	0,096	0,0134	1,068

Влияние неоднородности ядра получается еще меньшим, чем для прилива 2-го порядка. Это можно было ожидать заранее.

Числа, помещенные в табл. 1, согласуются между собой только в общих чертах. При более внимательном рассмотрении обнаруживается, что результаты, полученные разными авторами для близких моделей Земли (№ 3, 4, 8), отличаются больше, чем это можно было ожидать из сравнения очень разных моделей (№ 1 и 9). Значения k для № 6—8 меньше, чем для № 9. Модели № 4 и 5 различаются между собой почти так же, как модели № 6 и 7, но значения h возрастают в первом случае и убывают во втором.

Таким образом, теоретические значения чисел Лява расходятся приблизительно на 0,02. Весьма вероятно, что главный источник ошибки — это не различие моделей, а наличие систематических ошибок при численном интегрировании дифференциальных уравнений. Анализ результатов сильно облегчится при полной и однообразной публикации результатов интегрирования. Мы считаем наиболее удобным представлением общего интеграла в виде, соответствующем формуле (7).

Выражаем благодарность Н. Н. Парийскому за ценные советы.

r	$\frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\frac{\partial H}{\partial M_0}$	$\frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\frac{\partial T}{\partial T_0}$	$\frac{\partial T}{\partial R_0}$
1,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,99	1,0073	-0,0224	0,0000	-0,0001	0,0012	-0,0176	0,0099	0,9807	-0,0002
0,98	1,0144	-0,0454	0,0000	-0,0002	0,0045	-0,0341	0,0197	0,9627	-0,0006
0,97	1,0213	-0,0688	0,0001	-0,0004	0,0101	-0,0496	0,0294	0,9460	-0,0013
0,96	1,0280	-0,0929	0,0002	-0,0008	0,0178	-0,0644	0,0389	0,9304	-0,0023
0,95	1,0345	-0,1177	0,0004	-0,0011	0,0252	-0,0784	0,0482	0,9159	-0,0034
0,94	1,0409	-0,1433	0,0006	-0,0016	0,0402	-0,0917	0,0574	0,9024	-0,0048
0,93	1,0471	-0,1696	0,0010	-0,0021	0,0517	-0,1041	0,0664	0,8897	-0,0062
0,92	1,0531	-0,1967	0,0015	-0,0027	0,0672	-0,1156	0,0753	0,8777	-0,0077
0,91	1,0589	-0,2245	0,0020	-0,0033	0,0839	-0,1263	0,0840	0,8663	-0,0093
0,90	1,0646	-0,2532	0,0027	-0,0039	0,1026	-0,1362	0,0925	0,8554	-0,0110
0,89	1,0702	-0,2828	0,0035	-0,0046	0,1221	-0,1455	0,1009	0,8452	-0,0126
0,88	1,0755	-0,3135	0,0044	-0,0053	0,1439	-0,1542	0,1092	0,8355	-0,0143
0,87	1,0808	-0,3453	0,0055	-0,0061	0,1667	-0,1623	0,1173	0,8263	-0,0161
0,86	1,0858	-0,3784	0,0067	-0,0069	0,1915	-0,1700	0,1252	0,8177	-0,0178
0,85	1,0907	-0,4130	0,0081	-0,0077	0,2178	-0,1775	0,1330	0,8101	-0,0197
0,84	1,0954	-0,4496	0,0098	-0,0087	0,2474	-0,1848	0,1407	0,8039	-0,0217
0,83	1,1000	-0,4883	0,0117	-0,0097	0,2786	-0,1920	0,1482	0,7989	-0,0238
0,82	1,1043	-0,5294	0,0138	-0,0108	0,3128	-0,1991	0,1557	0,7953	-0,0261
0,81	1,1083	-0,5730	0,0163	-0,0120	0,3504	-0,2060	0,1630	0,7930	-0,0286
0,80	1,1121	-0,6194	0,0191	-0,0133	0,3906	-0,2129	0,1703	0,7921	-0,0311
0,79	1,1156	-0,6688	0,0223	-0,0147	0,4346	-0,2195	0,1775	0,7925	-0,0339
0,78	1,1188	-0,7214	0,0260	-0,0162	0,4821	-0,2260	0,1847	0,7942	-0,0367
0,77	1,1217	-0,7776	0,0300	-0,0178	0,5336	-0,2323	0,1918	0,7973	-0,0397
0,76	1,1241	-0,8377	0,0346	-0,0195	0,5893	-0,2383	0,1989	0,8017	-0,0429
0,75	1,1261	-0,9019	0,0397	-0,0214	0,6497	-0,2441	0,2060	0,8076	-0,0462
0,74	1,1275	-0,9707	0,0454	-0,0233	0,7151	-0,2497	0,2131	0,8148	-0,0497
0,73	1,1284	-1,0445	0,0518	-0,0255	0,7858	-0,2550	0,2203	0,8235	-0,0534
0,72	1,1287	-1,1237	0,0589	-0,0278	0,8625	-0,2599	0,2275	0,8337	-0,0572
0,71	1,1283	-1,2089	0,0668	-0,0302	0,9454	-0,2645	0,2348	0,8454	-0,0612
0,70	1,1272	-1,3004	0,0756	-0,0329	1,0353	-0,2686	0,2422	0,8586	-0,0654
0,69	1,1251	-1,3990	0,0854	-0,0357	1,1327	-0,2723	0,2497	0,8735	-0,0698
0,68	1,1222	-1,5054	0,0962	-0,0387	1,2382	-0,2755	0,2573	0,8900	-0,0744
0,67	1,1181	-1,6201	0,1081	-0,0420	1,3527	-0,2782	0,2651	0,9082	-0,0792
0,66	1,1128	-1,7440	0,1214	-0,0455	1,4769	-0,2802	0,2731	0,9282	-0,0843
0,65	1,1062	-1,8780	0,1360	-0,0493	1,6117	-0,2815	0,2813	0,9501	-0,0895
0,64	1,0980	-2,0231	0,1523	-0,0534	1,7582	-0,2820	0,2897	0,9740	-0,0951
0,63	1,0882	-2,1803	0,1702	-0,0578	1,9175	-0,2816	0,2985	0,9999	-0,1009
0,62	1,0764	-2,3509	0,1900	-0,0625	2,0909	-0,2803	0,3076	1,0281	-0,1070
0,61	1,0626	-2,5362	0,2119	-0,0677	2,2794	-0,2778	0,3170	1,0585	-0,1134
0,60	1,0463	-2,7377	0,2362	-0,0732	2,4853	-0,2741	0,3268	1,0914	-0,1201
0,59	1,0273	-2,9571	0,2630	-0,0792	2,7095	-0,2690	0,3371	1,1269	-0,1272
0,58	1,0054	-3,1963	0,2927	-0,0857	2,9546	-0,2623	0,3478	1,1651	-0,1347
0,57	0,9800	-3,4573	0,3255	-0,0927	3,2225	-0,2539	0,3591	1,2063	-0,1426
0,56	0,9507	-3,7427	0,3619	-0,1004	3,5157	-0,2434	0,3710	1,2508	-0,1509
0,55	0,9171	-4,0549	0,4022	-0,1087	3,8371	-0,2307	0,3836	1,2986	-0,1598

приливов 2-го горядка

$\frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\frac{\partial T}{\partial M_0}$	$\frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\frac{\partial R}{\partial \tau_0}$	$\frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\frac{\partial R}{\partial L_0}$	$\frac{\partial R}{\partial M_0}$	$\frac{\partial R}{\partial N_0}$
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0554	-0,0002	-0,0180	-0,0003	1,0003	-0,0101	0,0000	0,0002
0,0000	-0,1066	-0,0007	-0,0366	-0,0014	1,0012	-0,0204	0,0000	0,0006
0,0000	-0,1542	-0,0016	-0,0556	-0,0031	1,0028	-0,0309	0,0001	0,0014
0,0000	-0,1984	-0,0027	-0,0751	-0,0056	1,0051	-0,0417	0,0002	0,0025
0,0000	-0,2429	-0,0041	-0,0952	-0,0088	1,0080	-0,0527	0,0003	0,0039
0,0000	-0,2763	-0,0058	-0,1159	-0,0129	1,0117	-0,0640	0,0007	0,0056
0,0000	-0,3163	-0,0076	-0,1374	-0,0177	1,0162	-0,0756	0,0012	0,0076
0,0001	-0,3439	-0,0095	-0,1600	-0,0233	1,0215	-0,0874	0,0016	0,0099
0,0001	-0,3754	-0,0116	-0,1837	-0,0298	1,0277	-0,0996	0,0027	0,0126
0,0001	-0,3991	-0,0137	-0,2084	-0,0371	1,0347	-0,1120	0,0034	0,0156
0,0001	-0,4230	-0,0160	-0,2345	-0,0453	1,0427	-0,1249	0,0049	0,0189
0,0002	-0,4435	-0,0183	-0,2617	-0,0546	1,0516	-0,1381	0,0062	0,0226
0,0002	-0,4629	-0,0206	-0,2903	-0,0648	1,0616	-0,1517	0,0082	0,0267
0,0002	-0,4803	-0,0230	-0,3203	-0,0761	1,0727	-0,1657	0,0103	0,0312
0,0002	-0,4967	-0,0255	-0,3514	-0,0887	1,0849	-0,1802	0,0129	0,0359
0,0003	-0,5158	-0,0281	-0,3835	-0,1026	1,0983	-0,1951	0,0161	0,0410
0,0003	-0,5314	-0,0308	-0,4167	-0,1179	1,1130	-0,2106	0,0196	0,0465
0,0005	-0,5505	-0,0336	-0,4510	-0,1347	1,1290	-0,2265	0,0240	0,0522
0,0006	-0,5682	-0,0365	-0,4865	-0,1530	1,1465	-0,2431	0,0287	0,0584
0,0007	-0,5874	-0,0395	-0,5234	-0,1729	1,1655	-0,2603	0,0344	0,0649
0,0008	-0,6063	-0,0426	-0,5617	-0,1944	1,1860	-0,2781	0,0405	0,0718
0,0009	-0,6261	-0,0459	-0,6015	-0,2178	1,2083	-0,2966	0,0476	0,0791
0,0009	-0,6462	-0,0492	-0,6430	-0,2429	1,2323	-0,3159	0,0553	0,0869
0,0009	-0,6671	-0,0527	-0,6862	-0,2700	1,2583	-0,3360	0,0640	0,0952
0,0010	-0,6885	-0,0563	-0,7313	-0,2991	1,2863	-0,3569	0,0736	0,1040
0,0012	-0,7107	-0,0600	-0,7785	-0,3304	1,3164	-0,3787	0,0841	0,1133
0,0015	-0,7336	-0,0638	-0,8279	-0,3640	1,3488	-0,4016	0,0958	0,1232
0,0017	-0,7573	-0,0678	-0,8797	-0,3999	1,3837	-0,4254	0,1085	0,1337
0,0019	-0,7819	-0,0719	-0,9340	-0,4384	1,4212	-0,4504	0,1225	0,1448
0,0022	-0,8074	-0,0761	-0,9911	-0,4797	1,4615	-0,4766	0,1378	0,1567
0,0025	-0,8340	-0,0805	-1,0511	-0,5238	1,5048	-0,5041	0,1545	0,1693
0,0029	-0,8617	-0,0850	-1,1144	-0,5711	1,5513	-0,5330	0,1728	0,1827
0,0032	-0,8906	-0,0897	-1,1811	-0,6216	1,6013	-0,5635	0,1927	0,1970
0,0036	-0,9208	-0,0946	-1,2517	-0,6757	1,6549	-0,5955	0,2144	0,2122
0,0040	-0,9525	-0,0997	-1,3262	-0,7336	1,7125	-0,6293	0,2380	0,2284
0,0045	-0,9857	-0,1049	-1,4052	-0,7956	1,7745	-0,6650	0,2637	0,2456
0,0049	-1,0205	-0,1104	-1,4890	-0,8619	1,8410	-0,7028	0,2917	0,2641
0,0055	-1,0572	-0,1161	-1,5780	-0,9331	1,9126	-0,7428	0,3221	0,2838
0,0060	-1,0958	-0,1220	-1,6726	-1,0094	1,9895	-0,7852	0,3552	0,3048
0,0066	-1,1366	-0,1282	-1,7733	-1,0912	2,0723	-0,8302	0,3913	0,3274
0,0073	-1,1796	-0,1347	-1,8807	-1,1791	2,1615	-0,8781	0,4304	0,3515
0,0080	-1,2252	-0,1414	-1,9954	-1,2735	2,2576	-0,9291	0,4731	0,3774
0,0087	-1,2734	-0,1485	-2,1181	-1,3751	2,3611	-0,9835	0,5196	0,4053
0,0095	-1,3247	-0,1559	-2,2494	-1,4845	2,4729	-1,0415	0,5702	0,4352
0,0104	-1,3792	-0,1638	-2,3903	-1,6023	2,5935	-1,1037	0,6253	0,4674

r	$\frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\frac{\partial L}{\partial M_0}$	$\frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\frac{\partial M}{\partial H_0}$	$\frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\frac{\partial M}{\partial R_0}$
1,00	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,99	0,0011	0,1068	-0,0600	1,0003	-0,0030	0,0000	0,0002	-0,0259	0,0059
0,98	0,0043	0,2135	-0,1201	1,0012	-0,0120	-0,0001	0,0004	-0,0534	0,0119
0,97	0,0098	0,3202	-0,1803	1,0028	-0,0266	-0,0003	0,0008	-0,0825	0,0178
0,96	0,0176	0,4270	-0,2408	1,0049	-0,0450	-0,0006	0,0012	-0,1134	0,0237
0,95	0,0278	0,5340	-0,3015	1,0078	-0,0660	-0,0012	0,0017	-0,1459	0,0297
0,94	0,0403	0,6414	-0,3626	1,0113	-0,0980	-0,0021	0,0021	-0,1802	0,0357
0,93	0,0554	0,7503	-0,4241	1,0155	-0,1340	-0,0033	0,0024	-0,2172	0,0418
0,92	0,0731	0,8617	-0,4861	1,0204	-0,1720	-0,0048	0,0028	-0,2575	0,0481
0,91	0,0937	0,9756	-0,5486	1,0260	-0,2230	-0,0069	0,0032	-0,3015	0,0545
0,90	0,1172	1,0920	-0,6118	1,0323	-0,2760	-0,0094	0,0035	-0,3491	0,0612
0,89	0,1437	1,2109	-0,6758	1,0394	-0,3322	-0,0125	0,0038	-0,4006	0,0681
0,88	0,1734	1,3325	-0,7405	1,0473	-0,3952	-0,0161	0,0038	-0,4561	0,0752
0,87	0,2064	1,4568	-0,8061	1,0561	-0,4606	-0,0204	0,0036	-0,5156	0,0826
0,86	0,2428	1,5838	-0,8727	1,0656	-0,5322	-0,0254	0,0030	-0,5793	0,0902
0,85	0,2826	1,7123	-0,9402	1,0760	-0,6072	-0,0311	0,0018	-0,6454	0,0981
0,84	0,3256	1,8414	-1,0089	1,0873	-0,6840	-0,0375	-0,0001	-0,7123	0,1060
0,83	0,3718	1,9714	-1,0787	1,0996	-0,7679	-0,0447	-0,0027	-0,7801	0,1141
0,82	0,4214	2,1026	-1,1498	1,1127	-0,8513	-0,0526	-0,0059	-0,8488	0,1223
0,81	0,4744	2,2353	-1,2224	1,1269	-0,9418	-0,0614	-0,0098	-0,9187	0,1307
0,80	0,5310	2,3697	-1,2964	1,1421	-1,0334	-0,0711	-0,0145	-0,9897	0,1393
0,79	0,5911	2,5063	-1,3721	1,1583	-1,1309	-0,0817	-0,0199	-1,0621	0,1481
0,78	0,6548	2,6452	-1,4495	1,1757	-1,2314	-0,0933	-0,0261	-1,1360	0,1571
0,77	0,7224	2,7868	-1,5289	1,1942	-1,3370	-0,1059	-0,0331	-1,2115	0,1664
0,76	0,7939	2,9315	-1,6103	1,2138	-1,4466	-0,1196	-0,0409	-1,2887	0,1760
0,75	0,8694	3,0796	-1,6939	1,2349	-1,5613	-0,1345	-0,0496	-1,3678	0,1858
0,74	0,9490	3,2315	-1,7798	1,2570	-1,6806	-0,1505	-0,0592	-1,4490	0,1961
0,73	1,0330	3,3876	-1,8683	1,2807	-1,8053	-0,1678	-0,0698	-1,5325	0,2067
0,72	1,1214	3,5482	-1,9594	1,3058	-1,9353	-0,1865	-0,0813	-1,6184	0,2177
0,71	1,2145	3,7138	-2,0535	1,3323	-2,0710	-0,2065	-0,0938	-1,7069	0,2292
0,70	1,3124	3,8848	-2,1506	1,3605	-2,2126	-0,2280	-0,1073	-1,7983	0,2412
0,69	1,4154	4,0617	-2,2510	1,3903	-2,3605	-0,2511	-0,1220	-1,8927	0,2536
0,68	1,5236	4,2449	-2,3550	1,4219	-2,5150	-0,2757	-0,1378	-1,9905	0,2667
0,67	1,6373	4,4351	-2,4628	1,4553	-2,6764	-0,3021	-0,1548	-2,0919	0,2803
0,66	1,7567	4,6327	-2,5746	1,4906	-2,8452	-0,3303	-0,1731	-2,1972	0,2946
0,65	1,8823	4,8383	-2,6907	1,5280	-3,0217	-0,3604	-0,1927	-2,3066	0,3096
0,64	2,0142	5,0526	-2,8114	1,5676	-3,2063	-0,3926	-0,2137	-2,4206	0,3254
0,63	2,1528	5,2762	-2,9371	1,6095	-3,3997	-0,4268	-0,2361	-2,5394	0,3419
0,62	2,2985	5,5097	-3,0681	1,6537	-3,6023	-0,4633	-0,2601	-2,6633	0,3594
0,61	2,4517	5,7541	-3,2048	1,7006	-3,8146	-0,5022	-0,2857	-2,7929	0,3777
0,60	2,6128	6,0100	-3,3476	1,7502	-4,0373	-0,5436	-0,3130	-2,9286	0,3971
0,59	2,7824	6,2784	-3,4969	1,8026	-4,2711	-0,5877	-0,3422	-3,0708	0,4176
0,58	2,9608	6,5602	-3,6532	1,8582	-4,5167	-0,6347	-0,3733	-3,2200	0,4392
0,57	3,1488	6,8563	-3,8171	1,9171	-4,7749	-0,6846	-0,4064	-3,3768	0,4621
0,56	3,3469	7,1680	-3,9890	1,9795	-5,0464	-0,7378	-0,4417	-3,5417	0,4864
0,55	3,5559	7,4964	-4,1697	2,0457	-5,3324	-0,7945	-0,4793	-3,7155	0,5121

Примечание. Интегральные кривые $\frac{\partial \varphi}{\partial M}$ получены «сквозным» счетом (без итера

Таблица 2 (продолжение)

$\frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\frac{\partial N}{\partial M_0}$	$\frac{\partial N}{\partial N_0}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,0000	1,0006	0,0037	0,0115	0,0030	-0,0004	0,0061	-0,0617	1,0125
-0,0001	1,0026	0,0074	0,0227	0,0112	-0,0015	0,0125	-0,1272	1,0248
-0,0002	1,0060	0,0111	0,0335	0,0251	-0,0035	0,0192	-0,1971	1,0369
-0,0003	1,0100	0,0148	0,0439	0,0454	-0,0065	0,0264	-0,2721	1,0488
-0,0005	1,0150	0,0184	0,0540	0,0729	-0,0105	0,0338	-0,3461	1,0606
-0,0007	1,0220	0,0221	0,0638	0,1082	-0,0156	0,0417	-0,4429	1,0722
-0,0010	1,0330	0,0257	0,0736	0,1526	-0,0220	0,0502	-0,5328	1,0837
-0,0013	1,0480	0,0292	0,0829	0,2092	-0,0300	0,0592	-0,6393	1,0951
-0,0016	1,0652	0,0328	0,0916	0,2797	-0,0396	0,0689	-0,7559	1,1064
-0,0021	1,0856	0,0363	0,0997	0,3660	-0,0511	0,0794	-0,8848	1,1176
-0,0026	1,1090	0,0398	0,1072	0,4705	-0,0648	0,0906	-1,0293	1,1286
-0,0031	1,1336	0,0432	0,1142	0,5951	-0,0809	0,1027	-1,1900	1,1396
-0,0038	1,1627	0,0468	0,1207	0,7428	-0,0998	0,1158	-1,3705	1,1503
-0,0045	1,1962	0,0503	0,1270	0,9162	-0,1217	0,1298	-1,5725	1,1608
-0,0053	1,2332	0,0539	0,1344	1,1128	-0,1469	0,1448	-1,7968	1,1707
-0,0061	1,2720	0,0577	0,1429	1,3330	-0,1754	0,1607	-2,0401	1,1799
-0,0070	1,3140	0,0616	0,1528	1,5790	-0,2077	0,1776	-2,3137	1,1883
-0,0079	1,3560	0,0657	0,1643	1,8534	-0,2441	0,1956	-2,6117	1,1958
-0,0089	1,3990	0,0699	0,1779	2,1590	-0,2851	0,2147	-2,9400	1,2022
-0,0100	1,4446	0,0743	0,1940	2,4990	-0,3311	0,2351	-3,3030	1,2073
-0,0111	1,4945	0,0789	0,2130	2,8770	-0,3827	0,2569	-3,7025	1,2109
-0,0122	1,5463	0,0838	0,2354	3,2969	-0,4404	0,2802	-4,1440	1,2127
-0,0135	1,6013	0,0888	0,2620	3,7630	-0,5050	0,3051	-4,6310	1,2124
-0,0147	1,6589	0,0941	0,2934	4,2804	-0,5773	0,3316	-5,1691	1,2096
-0,0161	1,7196	0,0997	0,3303	4,8545	-0,6579	0,3604	-5,7638	1,2041
-0,0174	1,7834	0,1056	0,3738	5,4915	-0,7479	0,3911	-6,4216	1,1954
-0,0189	1,8507	0,1117	0,4249	6,1983	-0,8484	0,4242	-7,1495	1,1829
-0,0205	1,9213	0,1183	0,4848	6,9828	-0,9605	0,4600	-7,9556	1,1660
-0,0221	1,9957	0,1252	0,5548	7,8537	-1,0855	0,4986	-8,8489	1,1441
-0,0239	2,0740	0,1325	0,6365	8,8208	-1,2251	0,5403	-9,8396	1,1164
-0,0257	2,1565	0,1402	0,7318	9,8954	-1,3809	0,5856	-10,939	1,0821
-0,0276	2,2432	0,1484	0,8427	11,090	-1,5548	0,6347	-12,161	1,0400
-0,0296	2,3346	0,1571	0,9716	12,419	-1,7491	0,6881	-13,519	0,9891
-0,0318	2,4308	0,1663	1,1212	13,898	-1,9662	0,7462	-15,031	0,9280
-0,0340	2,5322	0,1760	1,2946	15,546	-2,2089	0,8097	-16,714	0,8550
-0,0364	2,6391	0,1864	1,4956	17,384	-2,4806	0,8790	-18,592	0,7685
-0,0388	2,7518	0,1974	1,7281	19,435	-2,7849	0,9548	-20,697	0,6663
-0,0415	2,8707	0,2091	1,9971	21,726	-3,1259	1,0380	-23,027	0,5460
-0,0442	2,9962	0,2216	2,3082	24,289	-3,5085	1,1294	-25,659	0,4048
-0,0471	3,1286	0,2349	2,6677	27,159	-3,9382	1,2299	-28,590	0,2395
-0,0502	3,2687	0,2490	3,0831	30,376	-4,4213	1,3407	-31,884	0,0464
-0,0535	3,4166	0,2640	3,5632	33,987	-4,9652	1,4631	-35,583	-0,1789
-0,0569	3,5731	0,2801	4,1179	38,046	-5,5781	1,5986	-39,744	-0,4416
-0,0605	3,7387	0,2972	4,7592	42,616	-6,2699	1,7488	-44,430	-0,7475
-0,0644	3,9142	0,3154	5,5007	47,767	-7,0517	1,9157	-49,717	-1,1036

щпй в точке скачка ρ').

r	$\frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\frac{\partial H}{\partial I_0}$	$\frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\frac{\partial H}{\partial M_0}$	$\frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\frac{\partial T}{\partial I_0}$	$\frac{\partial T}{\partial R_0}$
1,00	1,0000	0	0	0	0	0	0	1,0000	0
0,99	1,0072	-0,0449	0	-0,0001	0,0023	-0,0175	0,0099	0,9814	-0,0002
0,98	1,0139	-0,0909	0,0001	-0,0002	0,0092	-0,0340	0,0197	0,9654	-0,0006
0,97	1,0202	-0,1382	0,0002	-0,0004	0,0203	-0,0496	0,0294	0,9518	-0,0013
0,96	1,0261	-0,1871	0,0004	-0,0008	0,0356	-0,0642	0,0390	0,9406	-0,0023
0,95	1,0314	-0,2380	0,0008	-0,0012	0,0551	-0,0781	0,0485	0,9315	-0,0035
0,94	1,0364	-0,2910	0,0013	-0,0016	0,0786	-0,0912	0,0578	0,9244	-0,0048
0,93	1,0408	-0,3462	0,0020	-0,0021	0,1060	-0,1035	0,0671	0,9190	-0,0063
0,92	1,0447	-0,4036	0,0029	-0,0027	0,1367	-0,1146	0,0764	0,9147	-0,0078
0,91	1,0481	-0,4634	0,0040	-0,0033	0,1708	-0,1249	0,0855	0,9115	-0,0094
0,90	1,0509	-0,5260	0,0054	-0,0040	0,2082	-0,1343	0,0946	0,9095	-0,0111
0,89	1,0531	-0,5916	0,0070	-0,0047	0,2490	-0,1430	0,1036	0,9085	-0,0128
0,88	1,0548	-0,6604	0,0089	-0,0054	0,2932	-0,1509	0,1126	0,9087	-0,0146
0,87	1,0558	-0,7329	0,0111	-0,0062	0,3409	-0,1582	0,1215	0,9100	-0,0164
0,86	1,0561	-0,8093	0,0136	-0,0070	0,3923	-0,1649	0,1305	0,9125	-0,0183
0,85	1,0556	-0,8908	0,0165	-0,0079	0,4482	-0,1712	0,1395	0,9170	-0,0202
0,84	1,0541	-0,9785	0,0199	-0,0089	0,5096	-0,1772	0,1486	0,9244	-0,0224
0,83	1,0517	-1,0731	0,0238	-0,0100	0,5770	-0,1828	0,1579	0,9348	-0,0247
0,82	1,0482	-1,1755	0,0284	-0,0112	0,6509	-0,1881	0,1674	0,9482	-0,0273
0,81	1,0434	-1,2865	0,0336	-0,0125	0,7320	-0,1930	0,1771	0,9645	-0,0300
0,80	1,0372	-1,4069	0,0395	-0,0139	0,8209	-0,1974	0,1870	0,9840	-0,0329
0,79	1,0295	-1,5380	0,0463	-0,0154	0,9184	-0,2012	0,1973	1,0065	-0,0360
0,78	1,0200	-1,6807	0,0540	-0,0171	1,0252	-0,2045	0,2079	1,0324	-0,0393
0,77	1,0086	-1,8364	0,0627	-0,0189	1,1422	-0,2072	0,2189	1,0615	-0,0429
0,76	0,9950	-2,0063	0,0726	-0,0209	1,2706	-0,2091	0,2304	1,0940	-0,0467
0,75	0,9789	-2,1921	0,0837	-0,0231	1,4113	-0,2102	0,2423	1,1302	-0,0507
0,74	0,9601	-2,3954	0,0962	-0,0254	1,5656	-0,2104	0,2549	1,1700	-0,0550
0,73	0,9381	-2,6182	0,1104	-0,0280	1,7349	-0,2095	0,2680	1,2137	-0,0596
0,72	0,9128	-2,8624	0,1262	-0,0308	1,9207	-0,2075	0,2818	1,2616	-0,0645
0,71	0,8835	-3,1305	0,1440	-0,0338	2,1248	-0,2042	0,2964	1,3137	-0,0696
0,70	0,8499	-3,4249	0,1639	-0,0371	2,3490	-0,1994	0,3118	1,3704	-0,0752
0,69	0,8113	-3,7487	0,1862	-0,0407	2,5955	-0,1930	0,3281	1,4320	-0,0811
0,68	0,7672	-4,1051	0,2111	-0,0446	2,8668	-0,1847	0,3455	1,4987	-0,0873
0,67	0,7169	-4,4977	0,2391	-0,0488	3,1654	-0,1743	0,3639	1,5710	-0,0941
0,66	0,6595	-4,9306	0,2703	-0,0535	3,4944	-0,1615	0,3836	1,6492	-0,1012
0,65	0,5942	-5,4085	0,3052	-0,0586	3,8574	-0,1461	0,4046	1,7337	-0,1089
0,64	0,5199	-5,9366	0,3443	-0,0642	4,2580	-0,1277	0,4271	1,8252	-0,1171
0,63	0,4354	-6,5206	0,3880	-0,0703	4,7008	-0,1058	0,4513	1,9240	-0,1259
0,62	0,3394	-7,1674	0,4369	-0,0770	5,1906	-0,0800	0,4772	2,0310	-0,1354
0,61	0,2304	-7,8844	0,4917	-0,0844	5,7330	-0,0498	0,5051	2,1467	-0,1456
0,60	0,1065	-8,6802	0,5530	-0,0926	6,3345	-0,0147	0,5352	2,2719	-0,1565
0,59	-0,0342	-9,5647	0,6217	-0,1015	7,0023	+0,0262	0,5677	2,4076	-0,1684
0,58	-0,1940	-10,5489	0,6988	-0,1114	7,7447	0,0736	0,6029	2,5548	-0,1811
0,57	-0,3757	-11,646	0,7854	-0,1223	8,5712	0,1283	0,6410	2,7145	-0,1949
0,56	-0,5823	-12,870	0,8826	-0,1345	9,4927	0,1915	0,6824	2,8880	-0,2099
0,55	-0,8174	-14,237	0,9920	-0,1479	10,5218	0,2645	0,7274	3,0768	-0,2262

для приливов 3-го порядка

	$\frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\frac{\partial T}{\partial M_0}$	$\frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\frac{\partial R}{\partial L_0}$	$\frac{\partial R}{\partial M_0}$	$\frac{\partial R}{\partial N_0}$
0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0
0,0001	-0,0554	-0,0002	-0,0181	-0,0007	1,0006	-0,0101	0	0,0002	0,0006
0,0001	-0,1067	-0,0007	-0,0366	-0,0027	1,0025	-0,0204	0,0001	0,0006	0,0014
0,0001	-0,1544	-0,0016	-0,0557	-0,0062	1,0056	-0,0310	0,0002	0,0014	0,0025
0,0001	-0,1990	-0,0027	-0,0753	-0,0112	1,0102	-0,0418	0,0004	0,0025	0,0039
0,0001	-0,2408	-0,0041	-0,0956	-0,0177	1,0161	-0,0529	0,0009	0,0039	0,0056
0,0001	-0,2801	-0,0058	-0,1166	-0,0259	1,0235	-0,0643	0,0015	0,0056	0,0076
0,0001	-0,3164	-0,0076	-0,1386	-0,0356	1,0326	-0,0760	0,0024	0,0076	0,0100
0,0001	-0,3491	-0,0096	-0,1618	-0,0469	1,0432	-0,0880	0,0036	0,0100	0,0127
0,0001	-0,3789	-0,0117	-0,1862	-0,0600	1,0556	-0,1004	0,0052	0,0127	0,0158
0,0001	-0,4062	-0,0139	-0,2121	-0,0750	1,0698	-0,1133	0,0072	0,0158	0,0192
0,0001	-0,4314	-0,0162	-0,2394	-0,0919	1,0859	-0,1266	0,0097	0,0192	0,0230
0,0002	-0,4549	-0,0186	-0,2683	-0,1109	1,1041	-0,1403	0,0128	0,0230	0,0273
0,0002	-0,4769	-0,0210	-0,2988	-0,1321	1,1244	-0,1546	0,0165	0,0273	0,0319
0,0002	-0,4977	-0,0236	-0,3312	-0,1556	1,1470	-0,1695	0,0209	0,0319	0,0369
0,0003	-0,5185	-0,0262	-0,3653	-0,1819	1,1720	-0,1849	0,0262	0,0369	0,0423
0,0003	-0,5404	-0,0290	-0,4009	-0,2113	1,1996	-0,2010	0,0326	0,0423	0,0482
0,0004	-0,5634	-0,0319	-0,4382	-0,2438	1,2300	-0,2178	0,0402	0,0482	0,0544
0,0005	-0,5876	-0,0350	-0,4774	-0,2797	1,2633	-0,2354	0,0490	0,0544	0,0611
0,0006	-0,6131	-0,0383	-0,5186	-0,3192	1,2996	-0,2539	0,0591	0,0611	0,0684
0,0007	-0,6399	-0,0418	-0,5620	-0,3624	1,3394	-0,2732	0,0706	0,0684	0,0761
0,0008	-0,6682	-0,0454	-0,6078	-0,4097	1,3826	-0,2935	0,0836	0,0761	0,0845
0,0009	-0,6981	-0,0493	-0,6563	-0,4613	1,4297	-0,3149	0,0984	0,0845	0,0934
0,0011	-0,7297	-0,0533	-0,7076	-0,5175	1,4809	-0,3374	0,1149	0,0934	0,1031
0,0013	-0,7631	-0,0575	-0,7621	-0,5786	1,5365	-0,3612	0,1333	0,1031	0,1134
0,0015	-0,7984	-0,0620	-0,8201	-0,6450	1,5969	-0,3863	0,1539	0,1134	0,1246
0,0017	-0,8359	-0,0668	-0,8818	-0,7171	1,6623	-0,4129	0,1768	0,1246	0,1366
0,0019	-0,8756	-0,0718	-0,9475	-0,7953	1,7332	-0,4411	0,2022	0,1366	0,1496
0,0022	-0,9178	-0,0771	-1,0178	-0,8801	1,8101	-0,4711	0,2303	0,1496	0,1636
0,0024	-0,9627	-0,0827	-1,0930	-0,9721	1,8935	-0,5029	0,2614	0,1636	0,1787
0,0028	-1,0104	-0,0886	-1,1735	-1,0720	1,9838	-0,5368	0,2958	0,1787	0,1950
0,0031	-1,0613	-0,0948	-1,2599	-1,1803	2,0817	-0,5730	0,3337	0,1950	0,2126
0,0035	-1,1155	-0,1015	-1,3527	-1,2978	2,1878	-0,6117	0,3755	0,2126	0,2318
0,0039	-1,1735	-0,1086	-1,4526	-1,4255	2,3029	-0,6531	0,4216	0,2318	0,2525
0,0043	-1,2354	-0,1161	-1,5602	-1,5642	2,4278	-0,6974	0,4725	0,2525	0,2749
0,0048	-1,3017	-0,1241	-1,6763	-1,7150	2,5633	-0,7449	0,5285	0,2749	0,2993
0,0053	-1,3728	-0,1327	-1,8019	-1,8791	2,7105	-0,7961	0,5902	0,2993	0,3259
0,0059	-1,4491	-0,1418	-1,9377	-2,0577	2,8705	-0,8511	0,6583	0,3259	0,3547
0,0065	-1,5311	-0,1516	-2,0850	-2,2525	3,0446	-0,9105	0,7334	0,3547	0,3862
0,0072	-1,6193	-0,1621	-2,2448	-2,4651	3,2340	-0,9746	0,8162	0,3862	0,4206
0,0080	-1,7144	-0,1734	-2,4186	-2,6972	3,4405	-1,0439	0,9075	0,4206	0,4581
0,0088	-1,8170	-0,1855	-2,6078	-2,9511	3,6657	-1,1190	1,0085	0,4581	0,4992
0,0097	-1,9279	-0,1985	-2,8141	-3,2292	3,9116	-1,2005	1,1200	0,4992	0,5442
0,0107	-2,0480	-0,2126	-3,0395	-3,5341	4,1805	-1,2892	1,2434	0,5442	0,5936
0,0118	-2,1781	-0,2278	-3,2860	-3,8683	4,4748	-1,3857	1,3801	0,5936	0,6479
0,0131	-2,3195	-0,2443	-3,5561	-4,2370	4,7973	-1,4910	1,5315	0,6479	

r	$\frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\frac{\partial L}{\partial M_0}$	$\frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\frac{\partial M}{\partial H_0}$	$\frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\frac{\partial M}{\partial R_0}$
1,00	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0
0,99	0,0022	0,2137	-0,1200	1,0006	-0,0061	0,0000	0,0000	-0,0553	0,0059
0,98	0,0087	0,4276	-0,2403	1,0024	-0,0240	-0,0002	-0,0002	-0,1142	0,0119
0,97	0,0197	0,6421	-0,3610	1,0055	-0,0532	-0,0005	-0,0007	-0,1768	0,0178
0,96	0,0354	0,8581	-0,4823	1,0099	-0,0935	-0,0013	-0,0015	-0,2432	0,0239
0,95	0,0557	1,0759	-0,6045	1,0156	-0,1444	-0,0024	-0,0029	-0,3135	0,0299
0,94	0,0809	1,2964	-0,7279	1,0226	-0,2057	-0,0041	-0,0047	-0,3881	0,0361
0,93	0,1113	1,5222	-0,8525	1,0310	-0,2780	-0,0066	-0,0074	-0,4689	0,0425
0,92	0,1472	1,7557	-0,9788	1,0408	-0,3614	-0,0097	-0,0107	-0,5579	0,0492
0,91	0,1889	1,9973	-1,1070	1,0522	-0,4557	-0,0138	-0,0150	-0,6556	0,0562
0,90	0,2367	2,2473	-1,2372	1,0650	-0,5609	-0,0189	-0,0204	-0,7624	0,0635
0,89	0,2910	2,5064	-1,3698	1,0794	-0,6767	-0,0252	-0,0271	-0,8789	0,0713
0,88	0,3519	2,7750	-1,5050	1,0954	-0,8032	-0,0326	-0,0352	-1,0055	0,0796
0,87	0,4199	3,0537	-1,6432	1,1132	-0,9404	-0,0414	-0,0451	-1,1429	0,0883
0,86	0,4954	3,3432	-1,7847	1,1327	-1,0882	-0,0516	-0,0569	-1,2917	0,0977
0,85	0,5782	3,6411	-1,9296	1,1540	-1,2453	-0,0632	-0,0708	-1,4478	0,1075
0,84	0,6682	3,9461	-2,0784	1,1773	-1,4107	-0,0764	-0,0866	-1,6077	0,1176
0,83	0,7657	4,2596	-2,2314	1,2025	-1,5850	-0,0912	-0,1042	-1,7720	0,1282
0,82	0,8711	4,5830	-2,3890	1,2298	-1,7689	-0,1078	-0,1239	-1,9412	0,1392
0,81	0,9846	4,9177	-2,5517	1,2594	-1,9629	-0,1262	-0,1457	-2,1159	0,1507
0,80	1,1067	5,2650	-2,7199	1,2912	-2,1678	-0,1465	-0,1697	-2,2967	0,1628
0,79	1,2377	5,6266	-2,8941	1,3254	-2,3843	-0,1690	-0,1961	-2,4844	0,1756
0,78	1,3782	6,0041	-3,0748	1,3622	-2,6132	-0,1937	-0,2250	-2,6793	0,1890
0,77	1,5286	6,3991	-3,2626	1,4016	-2,8553	-0,2209	-0,2566	-2,8832	0,2032
0,76	1,6894	6,8134	-3,4581	1,4439	-3,1116	-0,2506	-0,2909	-3,0960	0,2183
0,75	1,8613	7,2490	-3,6619	1,4892	-3,3832	-0,2830	-0,3282	-3,3188	0,2342
0,74	2,0449	7,7078	-3,8747	1,5376	-3,6709	-0,3184	-0,3688	-3,5527	0,2512
0,73	2,2409	8,1919	-4,0973	1,5894	-3,9762	-0,3570	-0,4127	-3,7986	0,2693
0,72	2,4501	8,7037	-4,3305	1,6448	-4,3001	-0,3989	-0,4602	-4,0577	0,2885
0,71	2,6735	9,2455	-4,5750	1,7040	-4,6442	-0,4443	-0,5116	-4,3312	0,3091
0,70	2,9118	9,8201	-4,8320	1,7672	-5,0098	-0,4937	-0,5672	-4,6205	0,3310
0,69	3,1662	10,430	-5,1023	1,8348	-5,3987	-0,5472	-0,6273	-4,9268	0,3545
0,68	3,4378	11,079	-5,3871	1,9070	-5,8126	-0,6051	-0,6921	-5,2518	0,3797
0,67	3,7279	11,769	-5,6876	1,9841	-6,2534	-0,6679	-0,7622	-5,5971	0,4067
0,66	4,0377	12,505	-6,0051	2,0666	-6,7233	-0,7357	-0,8378	-5,9646	0,4356
0,65	4,3689	13,290	-6,3410	2,1546	-7,2246	-0,8091	-0,9194	-6,3562	0,4667
0,64	4,7231	14,128	-6,6969	2,2488	-7,7598	-0,8885	-1,0075	-6,7741	0,5002
0,63	5,1021	15,025	-7,0744	2,3496	-8,3317	-0,9744	-1,1027	-7,2206	0,5361
0,62	5,5079	15,984	-7,4755	2,4574	-8,9433	-1,0672	-1,2056	-7,6985	0,5749
0,61	5,9428	17,012	-7,9021	2,5729	-9,5981	-1,1676	-1,3167	-8,2104	0,6167
0,60	6,4092	18,115	-8,3566	2,6967	-10,2996	-1,2761	-1,4369	-8,7597	0,6618
0,59	6,9097	19,298	-8,8415	2,8295	-11,0521	-1,3936	-1,5669	-9,3497	0,7105
0,58	7,4476	20,570	-9,3594	2,9719	-11,860	-1,5208	-1,7077	-9,9842	0,7631
0,57	8,0259	21,939	-9,9134	3,1250	-12,728	-1,6585	-1,8603	-10,667	0,8201
0,56	8,6486	23,413	-10,507	3,2896	-13,663	-1,8077	-2,0257	-11,404	0,8817
0,55	9,3197	25,002	-11,144	3,4667	-14,669	-1,9694	-2,2052	-12,200	0,9486

Таблица 3 (продолжение)

$\frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\frac{\partial M}{\partial M_0}$	$\frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\frac{\partial N}{\partial M_0}$	$\frac{\partial N}{\partial N_0}$
0	1,0000	0	0	0	0	0	0	1,0000
0	1,0014	0,0037	0,0115	0,0078	— 0,0007	0,0061	— 0,1234	1,0124
— 0,0001	1,0056	0,0074	0,0228	0,0300	— 0,0030	0,0125	— 0,2546	1,0243
— 0,0002	1,0130	0,0112	0,0340	0,0683	— 0,0071	0,0193	— 0,3951	1,0358
— 0,0003	1,0239	0,0149	0,0452	0,1250	— 0,0130	0,0264	— 0,5465	1,0467
— 0,0005	1,0384	0,0187	0,0565	0,2024	— 0,0210	0,0340	— 0,7110	1,0572
— 0,0007	1,0568	0,0225	0,0684	0,3030	— 0,0313	0,0420	— 0,8905	1,0671
— 0,0010	1,0800	0,0264	0,0813	0,4306	— 0,0443	0,0506	— 1,0876	1,0763
— 0,0013	1,1089	0,0304	0,0953	0,5933	— 0,0604	0,0599	— 1,3069	1,0848
— 0,0017	1,1440	0,0345	0,1,08	0,7969	— 0,0800	0,0699	— 1,5523	1,0926
— 0,0021	1,1858	0,0388	0,1283	1,0476	— 0,1036	0,0809	— 1,8281	1,0994
— 0,0026	1,2348	0,0433	0,1486	1,3526	— 0,1317	0,0927	— 2,1396	1,1050
— 0,0032	1,2915	0,0480	0,1725	1,7201	— 0,1649	0,1056	— 2,4924	1,1092
— 0,0039	1,3564	0,0530	0,2013	2,1594	— 0,2041	0,1196	— 2,8932	1,1118
— 0,0046	1,4300	0,0585	0,2362	2,6810	— 0,2499	0,1349	— 3,3494	1,1123
— 0,0054	1,5104	0,0643	0,2791	3,2833	— 0,3027	0,1514	— 3,8620	1,1103
— 0,0063	1,5956	0,0706	0,3309	3,9714	— 0,3632	0,1692	— 4,4358	1,1053
— 0,0072	1,6861	0,0773	0,3932	4,7553	— 0,4322	0,1883	— 5,0780	1,0970
— 0,0082	1,7821	0,0845	0,4677	5,6460	— 0,5106	0,2089	— 5,7972	1,0847
— 0,0095	1,8841	0,0923	0,5567	6,6562	— 0,5997	0,2312	— 6,6026	1,0677
— 0,0104	1,9925	0,1007	0,6625	7,8002	— 0,7005	0,2554	— 7,5050	1,0454
— 0,0116	2,1076	0,1097	0,7879	9,0940	— 0,8147	0,2816	— 8,5164	1,0169
— 0,0129	2,2301	0,1194	0,9360	10,5559	— 0,9437	0,3100	— 9,6505	0,9810
— 0,0143	2,3603	0,1299	1,1107	12,207	— 1,0895	0,3410	— 10,923	0,9366
— 0,0158	2,4989	0,1413	1,3161	14,070	— 1,2541	0,3748	— 12,351	0,8824
— 0,0174	2,6464	0,1535	1,5570	16,174	— 1,4399	0,4118	— 13,955	0,8169
— 0,0190	2,8036	0,1667	1,8392	18,547	— 1,6497	0,4522	— 15,758	0,7380
— 0,0208	2,9711	0,1810	2,1691	21,225	— 1,8865	0,4965	— 17,787	0,6439
— 0,0227	3,1497	0,1964	2,5542	24,249	— 2,1538	0,5452	— 20,069	0,5319
— 0,0248	3,3402	0,2131	3,0032	27,664	— 2,4559	0,5988	— 22,641	0,3993
— 0,0270	3,5436	0,2312	3,5261	31,522	— 2,7972	0,6579	— 25,541	0,2427
— 0,0293	3,7608	0,2507	4,1345	35,884	— 3,1831	0,7231	— 28,814	0,0583
— 0,0318	3,9930	0,2718	4,8421	40,819	— 3,6199	0,7952	— 32,511	— 0,1584
— 0,0345	4,2413	0,2946	5,6643	46,406	— 4,1145	0,8752	— 36,692	— 0,4126
— 0,0373	4,5070	0,3194	6,6196	52,738	— 4,6751	0,9640	— 41,425	— 0,7104
— 0,0404	4,7915	0,3462	7,7292	59,920	— 5,3112	1,0627	— 46,789	— 1,0588
— 0,0437	5,0965	0,3752	9,0179	68,076	— 6,0338	1,1728	— 52,877	— 1,4662
— 0,0472	5,4235	0,4066	10,515	77,349	— 6,8553	1,2956	— 59,793	— 1,9423
— 0,0510	5,7746	0,4406	12,254	87,903	— 7,7907	1,4330	— 67,662	— 2,4986
— 0,0551	6,1517	0,4776	14,275	99,932	— 8,8571	1,5870	— 76,627	— 3,1484
— 0,0595	6,5572	0,5176	16,625	113,66	— 10,074	1,7600	— 86,855	— 3,9076
— 0,0642	6,9937	0,5611	19,358	129,35	— 11,466	1,9546	— 98,542	— 4,7948
— 0,0692	7,4638	0,6083	22,542	147,32	— 13,060	2,1740	— 111,92	— 5,8321
— 0,0747	7,9707	0,6596	26,251	167,92	— 14,888	2,4220	— 127,25	— 7,0454
— 0,0806	8,5179	0,7155	30,577	191,57	— 16,988	2,7028	— 144,86	— 8,4659
— 0,0870	9,1091	0,7762	35,629	218,80	— 19,405	3,0215	— 165,12	— 10,1303

Разности значений функций для моделей № 2 и 3 табл. 1

r	$\Delta \frac{\partial H}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial H}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial T_0}$
1,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00
0,95	-0,004	0,01	-0,001	0,002	-0,03	-0,001	0,00
0,90	-0,012	0,03	-0,001	0,003	-0,04	-0,002	0,00
0,85	-0,017	0,06	-0,002	0,003	-0,03	-0,001	-0,01
0,80	-0,018	0,14	-0,006	0,002	0,02	-0,003	-0,02
0,75	-0,022	0,17	-0,005	0,000	0,00	-0,003	-0,01
0,70	-0,026	0,17	-0,008	0,000	-0,01	-0,002	0,00
0,65	-0,029	0,18	-0,012	0,001	-0,02	-0,002	0,00
0,60	-0,035	0,21	-0,016	0,002	-0,04	-0,001	0,00
0,55	-0,037	0,29	-0,028	0,002	-0,06	-0,002	-0,04

r	$\Delta \frac{\partial T}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial T}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial R}{\partial L_0}$
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,95	0,000	0,000	0,000	0,007	0,002	-0,001	0,001
0,90	0,001	0,000	0,000	0,008	0,003	-0,002	0,002
0,85	0,003	-0,001	-0,002	0,000	-0,009	-0,002	0,003
0,80	0,006	0,000	-0,003	-0,010	-0,013	-0,002	0,003
0,75	0,005	-0,001	-0,004	-0,015	-0,020	-0,004	0,004
0,70	0,005	-0,001	-0,012	-0,027	-0,042	-0,003	0,007
0,65	0,005	-0,001	-0,024	-0,034	-0,057	-0,004	0,007
0,60	0,007	-0,001	-0,042	-0,039	-0,095	-0,004	0,007
0,55	0,011	-0,001	-0,072	-0,044	-0,128	-0,006	0,008

r	$\Delta \frac{\partial R}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial L}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial H_0}$
1,00	0,00	0,000	0,00	0,000	0,000	0,00	0,000
0,95	-0,01	-0,001	0,02	0,001	-0,005	0,02	-0,002
0,90	-0,02	0,000	0,02	0,003	-0,009	0,08	-0,002
0,85	-0,02	0,008	0,00	0,007	-0,009	0,08	-0,001
0,80	-0,02	0,009	-0,04	0,013	-0,004	0,04	-0,002
0,75	-0,03	0,023	-0,03	0,013	-0,004	0,04	-0,010
0,70	-0,06	0,038	-0,02	0,016	-0,006	0,05	-0,013
0,65	-0,05	0,045	0,02	0,022	-0,007	0,06	-0,019
0,60	-0,04	0,064	0,07	0,025	-0,011	0,10	-0,026
0,55	-0,05	0,079	0,13	0,031	-0,013	0,13	-0,039

r	$\Delta \frac{\partial M}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial M}{\partial N_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial H_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial T_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial R_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial L_0}$	$\Delta \frac{\partial N}{\partial N_0}$
1,00	0,00	0,000	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,95	0,00	-0,001	0,000	0,00	0,00	-0,02	0,00	0,00	0,00
0,90	0,01	-0,003	0,001	-0,01	0,01	0,03	-0,01	0,00	0,00
0,85	-0,02	-0,001	0,001	-0,02	0,00	0,14	-0,01	0,01	0,00
0,80	-0,03	0,001	-0,001	-0,01	0,01	0,34	-0,02	0,00	0,08
0,75	-0,04	0,001	-0,001	-0,02	0,03	0,40	-0,02	0,01	0,13
0,70	-0,04	0,000	-0,001	-0,02	0,06	0,44	-0,02	0,01	0,23
0,65	-0,03	-0,002	0,000	-0,04	0,11	0,53	-0,01	0,03	0,20
0,60	-0,03	-0,003	-0,001	-0,03	0,18	0,53	0,02	0,04	0,36
0,55	-0,07	0,000	-0,002	-0,04	0,38	1,10	0,02	0,05	0,68

ЛИТЕРАТУРА

1. Takeuchi H. Trans. Amer. Geoph. Union, 1950, **31**, 651—689.
2. Bullen K. Mon. Not. (Geoph. Suppl.), 1950, **6**, 50.
3. Молоденский М. С. Труды Геофизического ин-та АН СССР, 1953, № 19 (146), 3—52.
4. Alterman Z., Jarosch H., Pekeris C. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1959, **252**, № 1268, 80—95.
5. Jeffrey H., Vicente R. Mon. Not., 1957, **117**, 142—173.
6. Молоденский М. С. Наст. сб., стр. 3.

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
8	5 св.	Ф	Ф ✓
16	9 св.	∫ _τ	∫ _s ✓
24	22 св., 6 столбец	1.714	0.714 ✓
38	1 сн., 6 столбец	-41.669	-14.669 ✓